

作业二

1. 阅读“道德风险简介”部分的幻灯片, 证明张三在保费为 $\pi = 1 - p(e)$ 时, 会选择全险: $C = L$.

- 提示: 你只需写出张三的期望效用函数, 论证它关于 C 的偏导始终为正即可.

2. 假设 Y 服从对数正态分布: $\ln Y \sim N(\mu, \sigma^2)$. 本问题涉及计算 Y 的期望, 从下面两小问中选择一问回答即可. (第二小问简单一些, 擅长微积分计算的同学可以尝试第一小问)

- 证明 $\mathbb{E}[Y] = \exp(\mu + \sigma^2/2)$.
- 使用任何你喜欢的计算工具 (Julia/Python/R/...), 用数值仿真验证 Y 的期望关于 σ^2 递增. 具体地, 你需要完成如下步骤:
 1. 令 $\sigma^2 = 1$, 从分布 $N(0, \sigma^2)$ 抽取 $N=1000$ 个样本: $z_1, \dots, z_N$.
 2. 令 $y_i = \exp(z_i)$, 计算 $\{y_i\}_{i=1}^N$ 的样本均值 $\bar{y} = \sum_{i=1}^N y_i / N$.
 3. 另取 $\sigma^2 = 3, 6, 9, 12$, 重复上述过程, 验证你得到的样本均值关于 σ^2 递增.

你可以通过修改下面的 Python 示例代码得到第二小问的答案. 示例代码计算了方差为 4 时的样本均值 $\bar{y}$, 你可以将它封装为一个函数, 函数的输入是正态分布的方差 (variance), 输出是样本均值, 并进一步验证样本均值关于方差递增.

```
from scipy.stats import norm
import numpy as np

# 设定参数
N = 1_000
mean = 0
variance = 4
std_dev = np.sqrt(variance)

# 数据生成
data = norm.rvs(loc=mean, scale=std_dev, size=N)
data = np.exp(data)

# 计算均值
sample_mean = np.mean(data)
```

```
print(f``Sample mean: {sample_mean}``)
```

3. 考虑如下包括公司 (委托人) 和张三 (代理人) 的道德风险问题. 博弈双方都是风险中性的, 且保留效用均为 0.

张三选择某个努力水平 $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}_+^2$. 注意, 这里张三的行动 a 是二维的, 你可以理解为张三在承担两个项目. 项目 1 的产出为 q_1 , 项目 2 的产出为 q_2 .

给定 (a_1, a_2) , 产出 $q = (q_1, q_2)$ 为:

$$q_1 = a_1 + e_1, \quad q_2 = a_2 + e_2$$

其中 $e_1, e_2 \sim N(0, \sigma^2)$, 且 e_1 和 e_2 是独立的. 张三的努力成本为

$$c(a_1, a_2) = (a_1^2 + a_2^2)/2 + ka_1a_2$$

其中 $k \in [-1, 1]$. 公司利润为 $q_1 + \varphi q_2 - w$, 其中 $\varphi > 0$ 外生给定, w 表示支付给张三的工资.

1. 描述该博弈的第一最优结果. (注: 第一最优结果对应公司可以直接监督张三行动的情形, 你只需描述该结果下张三的努力程度 a 即可.)
 2. 假设公司提供如下线性合同: $w(q_1, q_2) = a + b_1q_1 + b_2q_2$. 计算公司的最优线性合同以及张三的努力程度.
 3. 假设工资合同不能依赖于 q_2 , 只能依赖于 q_1 . 计算公司的最优线性合同.
 4. 比较 (2) 和 (3) 中的结果, 用文字解释其中的差异.
4. 以下是 DeepSeek (reasoning model) 于 2025-03-19, 对提示词

用中文向我介绍信息经济学中的道德风险模型. 你可以默认我数学很好, 回复中可以使用数学模型进行说明

给出的回复. 请挑出其中的三处错误或不妥之处. (我们课上目前只介绍了单期的道德风险模型, DeepSeek 回复中的多期模型、团队模型、多任务模型还没有涉及. 之后我们会专门介绍动态模型.)

我将从数学模型角度系统介绍信息经济学中的 **道德风险** (Moral Hazard) 模型. 以下内容假设您熟悉博弈论、期望效用理论和最优化方法。

道德风险 (Moral Hazard)

道德风险问题可分为两类:

1. **隐藏行动** (Hidden Action): 代理人行动不可观测 (如员工努力程度)。
2. **隐藏信息** (Hidden Information): 代理人拥有私人信息 (如项目风险类型)。

以下重点讨论 **隐藏行动** 模型。

1. 模型设定 (委托-代理框架)

- **代理人** (如经理) 选择行动 $a \in A$, 影响产出 $\pi(a)$, 但行动不可观测。
- **产出函数**: $\pi(a) = a + \epsilon$, 其中 $\epsilon \sim N(0, \sigma^2)$ 。
- **合同设计**: 委托人 (如股东) 设计支付合同 $s(\pi)$, 最大化期望利润 $E[\pi - s(\pi)]$, 同时满足:
 1. **参与约束** (PC): $E[u(s(\pi)) - c(a)] \geq \bar{u}$
 2. **激励相容约束** (IC): $a \in \arg \max_{a'} E[u(s(\pi(a')))] - c(a')$

2. 数学推导 (以线性合同为例)

- **假设**:
 - 代理人效用函数: $u(w) = -e^{-rw}$ (指数效用, r 为风险厌恶系数)
 - 成本函数: $c(a) = \frac{1}{2}a^2$
 - 线性合同: $s(\pi) = \alpha + \beta\pi$
- **代理人最大化问题**:

$$\max_a \left\{ E[u(\alpha + \beta\pi(a))] - \frac{1}{2}a^2 \right\}$$

由于 $\pi(a) = a + \epsilon$, 期望效用化简为:

$$\alpha + \beta a - \frac{r}{2}\beta^2\sigma^2 - \frac{1}{2}a^2$$

一阶条件得最优行动 $a^* = \beta$ 。

- **委托人问题**:

$$\max_{\alpha, \beta} E[\pi(a^*) - s(\pi(a^*))] = \max_{\alpha, \beta} (a^* - \alpha - \beta a^*)$$

结合参与约束 $\alpha + \beta a^* - \frac{r}{2}\beta^2\sigma^2 - \frac{1}{2}(a^*)^2 = \bar{u}$, 解得:

$$\beta^* = \frac{1}{1 + r\sigma^2}$$

风险分担与激励的权衡: β^* 随 r 或 σ^2 增大而减小。

3. 经济意义

- 代理人努力不足 ($a^* = \beta < 1$)，因需承担风险 ($\beta < 1$)。
- 最优合同需在 **激励强度**与 **风险分担**间平衡。

二、隐藏行动模型的扩展

1. 一般化委托-代理模型

模型设定

- **代理人行动**: $a \in A$ ，影响产出 $\pi \in \mathbb{R}$ ，其分布为 $F(\pi|a)$ ，密度 $f(\pi|a)$ 。
- **合同**: 委托人设计支付 $s(\pi)$ ，最大化期望利润：

$$\max_{s(\pi)} \int [\pi - s(\pi)] f(\pi|a) d\pi$$

- **约束条件**:
 - **参与约束 (PC)**: $\int u(s(\pi)) f(\pi|a) d\pi - c(a) \geq \bar{u}$
 - **激励相容约束 (IC)**: $a \in \arg \max_{a'} [\int u(s(\pi)) f(\pi|a') d\pi - c(a')]$

一阶方法 (First-Order Approach) 假设 a 一维连续，且满足单调似然比性质 (MLRP)，可用 **一阶条件**替代 IC：

$$\int u(s(\pi)) \frac{\partial f(\pi|a)}{\partial a} d\pi = c'(a)$$

最优合同设计 利用拉格朗日乘数法，最优支付 $s^*(\pi)$ 满足：

$$\frac{1}{u'(s(\pi))} = \lambda + \mu \frac{\frac{\partial f(\pi|a)}{\partial a}}{f(\pi|a)}$$

其中 λ (PC 乘子) 和 μ (IC 乘子) 为常数。

经济含义: 最优合同将支付与产出对努力程度的敏感度 $\frac{\partial f/\partial a}{f}$ 挂钩 (即 “似然比”)。

2. 多任务道德风险 (Holmström-Milgrom, 1991)

模型设定

- 代理人同时执行 n 项任务，行动 $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$ ，成本函数 $c(\mathbf{a})$ 。
- 产出 $\pi = \sum_{i=1}^n a_i + \epsilon$ ，其中 $\epsilon \sim N(0, \Sigma)$ (协方差矩阵 Σ)。

线性合同与最优激励强度 假设合同 $s(\pi) = \alpha + \beta^T \pi$, 代理人最大化:

$$\max_a \left[\alpha + \beta^T a - \frac{r}{2} \beta^T \Sigma \beta - c(a) \right]$$

一阶条件给出 $\nabla c(a) = \beta$ 。

委托人问题: 选择 β 最大化:

$$a^T 1 - \beta^T a - \frac{r}{2} \beta^T \Sigma \beta$$

关键结论:

- 若任务间成本互补 (如 $c(a) = \frac{1}{2} \|a\|^2$), 最优激励强度为:

$$\beta^* = (I + r\Sigma)^{-1} 1$$

- 若任务产出负相关 (Σ 非对角为负), 激励强度需降低, 以避免代理人过度关注某一任务。

3. 动态道德风险 (重复委托-代理)

两期模型设定

- 每期产出 $\pi_t = a_t + \epsilon_t$, $\epsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$, $t = 1, 2$ 。
- 代理人总效用: $u(s_1) - c(a_1) + \delta [u(s_2) - c(a_2)]$, 其中 δ 为折现因子。

最优动态合同

- **声誉效应:** 第一期表现影响委托人对第二期的信念。
- **棘轮效应 (Ratchet Effect):** 若委托人根据第一期产出调整第二期目标, 代理人可能降低第一期努力以隐藏能力。
- **数学刻画:** 通过逆向归纳法求解子博弈精炼均衡。

三、道德风险的解决方案

1. 信息甄别与监督

- 引入可观测的绩效指标 y , 与 a 相关, 设计合同 $s(\pi, y)$ 。
- 若监督成本为 k , 委托人选择监督当且仅当 $k <$ 代理人的信息租金。

2. 团队惩罚与锦标赛机制

- **团队生产:** 多个代理人的产出关联, 合同设计需避免搭便车 (Free-Riding)。
例如, 设定团队奖金阈值: $s_i(\pi_1, \dots, \pi_n) = \alpha + \beta \pi_i + \gamma \sum_{j=1}^n \pi_j$ 。

3. 股权激励与长期绑定

- 将代理人报酬与企业长期价值挂钩 (如股票期权), 缓解短期行为。

四、数值示例（线性合同下的风险分担）

假设：

- 代理人效用： $u(w) = -e^{-rw}$, $r = 1$
- 努力成本： $c(a) = \frac{1}{2}a^2$
- 产出： $\pi = a + \epsilon$, $\epsilon \sim N(0, 2)$

计算最优激励强度 β^* ：

$$\beta^* = \frac{1}{1 + r\sigma^2} = \frac{1}{1 + 1 \times 2} = \frac{1}{3}$$

结论：

- 代理人仅承担 1/3 的产出风险，努力水平 $a^* = \beta^* = 1/3$ 。
- 与帕累托最优（完全信息下 $a^{FB} = 1$ ）相比，道德风险导致显著效率损失。

五、总结与扩展方向

扩展方向	关键方程/结论
多任务模型	$\beta^* = (I + r\Sigma)^{-1}1$ （激励强度与任务相关性负相关）
动态模型	棘轮效应降低第一期努力，长期合同需承诺机制
团队生产	搭便车问题导致均衡努力低于最优水平，需团队惩罚或相对绩效评估

如需进一步探讨特定方向（如隐藏信息模型、不完全合同理论等），请随时告知！