vNM 公理化模型

上一讲中, 我们介绍了张三在信息不确定下的决策问题以及期望效用模型. 今天, 我们介绍 von Neumann-Morgenstern 关于期望效用的公理化模型, 后文简称为 vNM 模型.

vNM 模型讨论的是客观概率, 不必引入状态空间的概念. 这时, 张三的每个决策所导致的后果都可以用某个确定的概率分布来描述, 我们可以直接用**概率分布**来描述张三的决策.

我们把这个概率分布称为彩票 (lottery). 为了简化分析, 我们今天介绍的 vNM 模型只涉及到**简单彩票** (simple lottery), 下面给出其具体定义.

简单彩票

设 X 为所有确定性结果的集合, 彩票是定义在 X 上的概率分布 $p : X \to [0, 1]$.

简单彩票 (简单概率分布)

- 如果在彩票 p 下, 所有可能发生的结果只有有限多个, 我们称 p 为简单彩票.

记 p 为简单彩票, $p(x)$ 则表示确定性结果 $x \in X$ 发生的概率.

- 符号 $L(X)$ 表示 X 上所有简单彩票的集合.
- 集合 X 可以是无穷的, 但我们只考虑定义于其上的简单彩票.

退化彩票

- 如果在彩票 $p \in L(X)$ 下, 某个结果 $x \in X$ 会以概率 1 发生, 这时问题不再具有随机性. 我们称彩票 $p \in L(X)$ 是**退化的** (degenerate).
- 如果彩票 $p \in L(X)$ 至少有两个不同的奖品具有正概率, 则称其为**非退化彩票**.

简单彩票的三种表示

下面三种表示简单彩票的方法是等价的, 你在考试时可以使用任意一种你喜欢的方式.

1. $p(a) = 0.4$, $p(b) = 0.6$
2. $p = (0.4 \circ a, 0.6 \circ b)$
3. 树形图

复合彩票

给定两个简单彩票 $p \in L(X)$ 和 $q \in L(X)$ 和实数 $\alpha \in (0,1)$, 称 $\pi = (\alpha \circ p, (1-\alpha) \circ q)$ 为**复合彩票**, 其定义如下:

$$\pi(x) = \alpha p(x) + (1-\alpha)q(x) \quad \forall x \in X$$

- 可以验证, 复合彩票 π 本身也是简单彩票.

根据上面复合彩票 π 的定义, 它的另一种写法是 $\pi = \alpha p + (1-\alpha)q$.

- 请你试着用树形图的方式来表示复合彩票 π.

偏好关系

设 $\succeq$ 是 L(X) 上张三关于彩票的偏好关系.

- 偏好关系 $\succeq$ 描述了张三如何对 L(X) 中的彩票进行排序.
- 对于两个彩票 p, q:
  - $p \succeq q$ 表示 p **优于** q.
  - $p \succ q$ 表示 p **严格优于** q ($p \succeq q$ 且 $\neg(q \precsim p)$).

我们希望存在一个效用函数 $U : L(X) \to \mathbb{R}$, 使得 $p \succeq q$ 若且唯若 $U(p) \geq U(q)$.

- 请注意, 这里的偏好关系 $\succeq$ 不是定义在确定性结果 X 上的, 而是定义在彩票 (即不确定性结果) L(X) 上的.

vNM 公理

von Neumann 和 Morgenstern 提出如下**公理**, 这里的公理 (axiom) 就是假设的意思.

1. $\succeq$ 是**完备**且**传递**的:
   - (完备性) 对于任何一对彩票 p, q, 要么 p $\succeq$ q, 要么 q $\succeq$ p.
   - (传递性) 如果 p $\succeq$ q 且 q $\succeq$ r, 则 p $\succeq$ r.
2. $\succeq$ 满足**独立性公理**:
   - 对于任何彩票 p, q, r 和任何 a $\in$ (0, 1), 如果 p $\succeq$ q, 则

   $$ap + (1-a)r \succeq aq + (1-a)r$$

3. $\succeq$ 满足**连续性公理**:
   - 对于任何 p, q, r, 如果 p $\succ$ q $\succ$ r, 则存在 a, b $\in$ (0, 1), 使得

   $$ap + (1-a)r \succ q \succ bp + (1-b)r$$

关于 vNM 三公理的说明

- 同学们应该熟悉公理 1: 对于确定情形下偏好关系的讨论, 同样会要求其满足完备性和传递性.

- 公理 2 和公理 3 都涉及到复合彩票. 其中公理 3 没有太多经济学内涵, 引入它的目的是要求偏好关于概率是连续的.
- 公理 2 一般被称为独立性公理, 或替代性公理. 你可以用画树形图的方式来理解它, 并尝试说服自己这个假设是 “合理” 的.

vNM **定理**

vNM 证明了, 当偏好关系 $\succeq$ 满足上面三条公理 (假设) 时, 该偏好对应的效用函数 $U : L(X) \to \mathbb{R}$ 不仅存在, 而且可以表示为某个定义在 X 上的效用函数 u 的**期望**.

- 一般称 u 为张三的 vNM 效用函数.

期望效用表示 (Expected utility representation). 称定义在 $L(X)$ 上的偏好关系 $\succeq$ 存在期望效用表示, 若存在函数 $U : L(X) \to \mathbb{R}$ 使得 $p \succeq q$ 若且唯若 $U(p) \geq U(q)$, 并且 U 可以表示为某个效用函数 $u : X \to \mathbb{R}$ 的期望:

$$U(p) = \sum_{x \in X} p(x)u(x), \forall p \in L(X).$$

定理 (vNM **定理**). 令 $\succeq$ 为定义在 $L(X)$ 上的偏好关系. 下面两个陈述是等价的: (1) $\succeq$ 满足 vNM 三公理; (2) $\succeq$ 存在期望效用表示.

- (1) $\implies$ (2) 的证明有一点复杂, 你需要构造某个 vNM 效用函数 u. 我不打算在课堂上介绍这个构造.
- (2) $\implies$ (1) 的证明很直接, 留作习题. 你需要验证, 当存在期望效用表示时, vNM 的三条公理是自动满足的.

期望效用和正仿射变换

从现在起, 我们将直接使用效用函数来描述张三的行为.

- 张三的偏好由 vNM 效用函数 $u : X \to R$ 表示.
  - 注意, 这里的效用函数 u 是定义在确定性结果 X 上的, 我们用小写 u 表示.
- 彩票 p 对张三的期望效用为 $U(p) = \sum_{x \in X} p(x)u(x)$.
  - 用大写字母 U 表示期望效用

你可以对效用函数 u 进行任意的正仿射变换, 得到的新效用函数 v 也同样可以表示张三的偏好.

- 正仿射变换: $v(x) = \alpha u(x) + \beta$, 其中 $\alpha > 0$ 且 $\beta \in \mathbb{R}$.
- 对于所有 $p, q \in L(X)$,

$$\sum_{x \in X} p(x)v(x) \geq \sum_{x \in X} q(x)v(x) \text{ 若且唯若 } \sum_{x \in X} p(x)u(x) \geq \sum_{x \in X} q(x)u(x)$$

练习: Allais **悖论**

Allais 悖论是由法国经济学家 Maurice Allais 在 1953 年提出的一个经典实验, 用于检验期望效用理论的合理性. 实验设计如下:

- 比较彩票 A 和彩票 B:
  - 彩票 A: $(1 \circ 100$ 万元$)$
  - 彩票 B: $(33\% \circ 500$ 万元, $66\% \circ 100$ 万元, $1\% \circ 0$ 元$)$

第一问: 你认为 A 和 B 哪个更好, 或者无差异? 简单说明你的选择背后的依据.

- 比较彩票 A' 和彩票 B':
  - 彩票 A': $(34\% \circ 100$ 万元, $66\% \circ 0$ 元$)$
  - 彩票 B': $(33\% \circ 500$ 万元, $67\% \circ 0$ 元$)$

第二问: 你认为 A' 和 B' 哪个更好, 或者无差异? 简单说明你的选择背后的依据.

实验表明, 大多数人都**同时**认为:

- 彩票 A 严格优于彩票 B
- 彩票 B' 严格优于彩票 A'

第三问: 实验结果可以用期望效用模型来解释么?