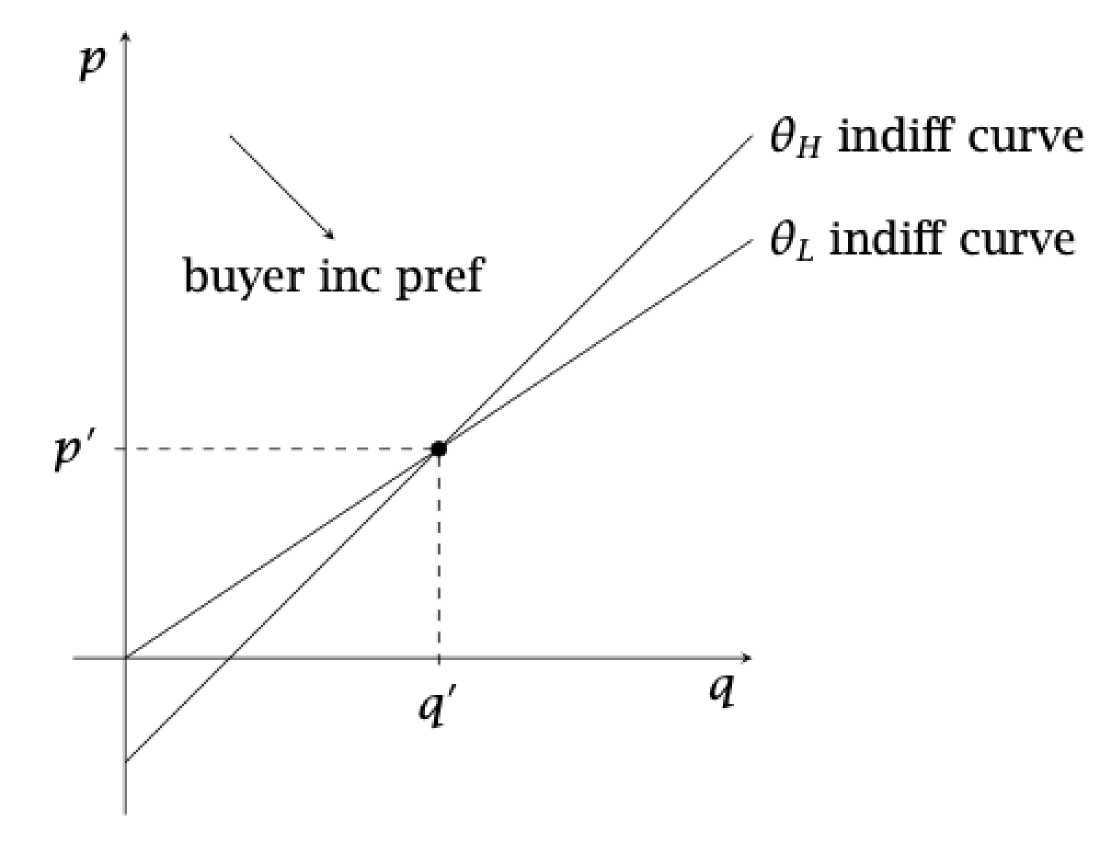
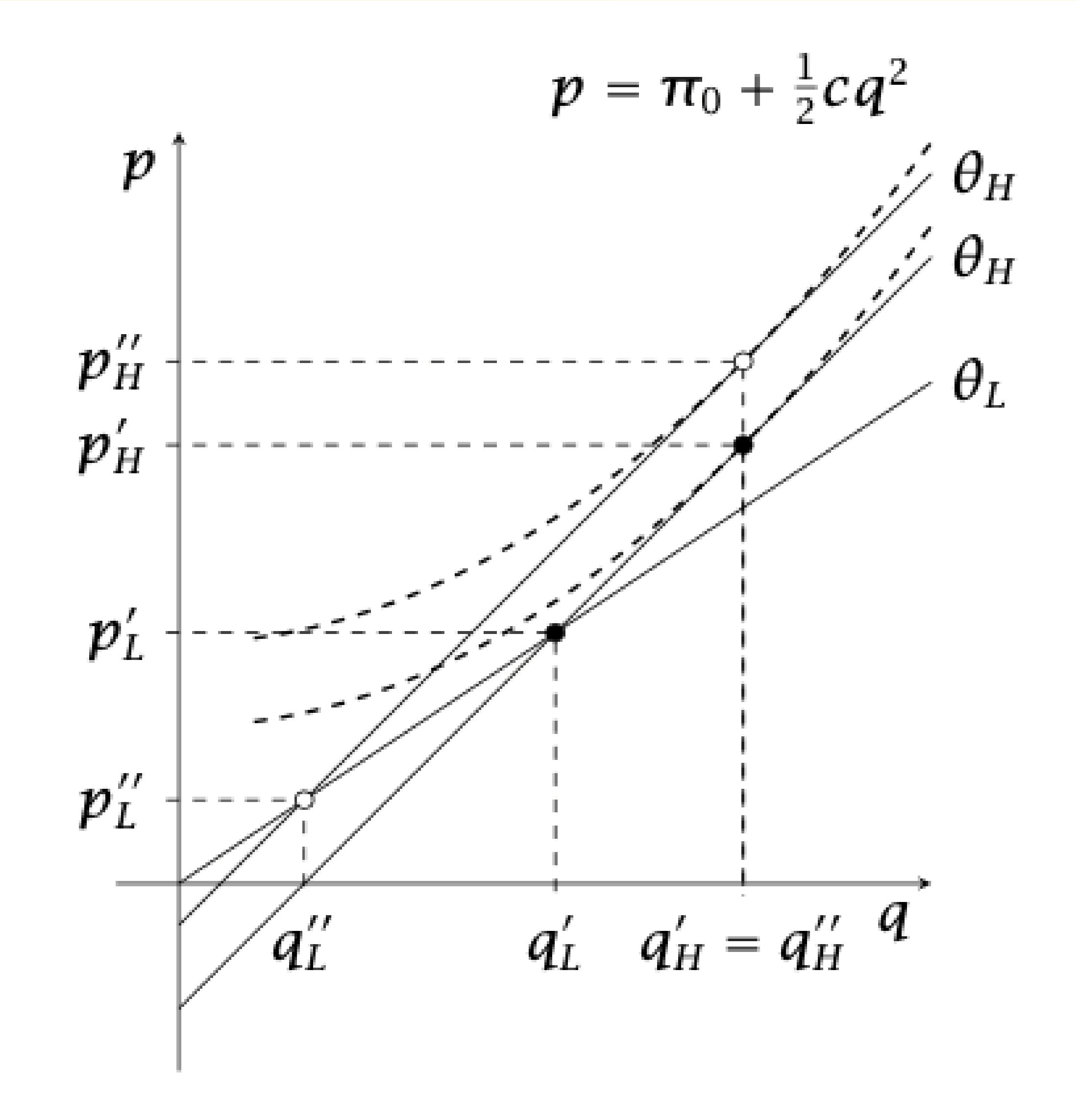
求解卖家最优化问题

信息经济学


p
buyer inc pref
θ_H indiff curve
θ_L indiff curve
p'
q'
q


$p = \pi_0 + \frac{1}{2}cq^2$
p
θ_H
θ_H
θ_L
p''_H
p'_H
p'_L
p''_L
q''_L
q'_L
$q'_H = q''_H$
q

Claims:

1. 约束 IR_H 是冗余的. (IR_L 和 IC_H 蕴含着 IR_H)
2. IC_L 和 IC_H 蕴含着 $q_H \geq q_L$
3. 若均衡中 $q_H \neq q_L$, 两个激励相容约束 (IC_L 和 IC_H) 只有一个是紧的.

存在两种可能的均衡类型:

1. $q_H \geq q_L > 0$, 卖家同时服务两类消费者.
   - 均衡中, IR_L 是紧的, IR_H 是松的.
   - $q_H > q_L$: 分离均衡 (separating equilibrium)
   - $q_L = q_H$: 混同均衡 (pooling equilibrium)

存在两种可能的均衡类型:

1. $q_H \geq q_L > 0$, 卖家同时服务两类消费者.
   - 均衡中, IR_L 是紧的, IR_H 是松的.
   - $q_H > q_L$: 分离均衡 (separating equilibrium)
   - $q_L = q_H$: 混同均衡 (pooling equilibrium)
2. 卖家放弃低类型 θ_L 消费者, 只服务高类型 θ_H 的消费者.
   - $q_L = p_L = 0$, 对应角点解的情形.
   - 均衡中, IR_H 是紧的.

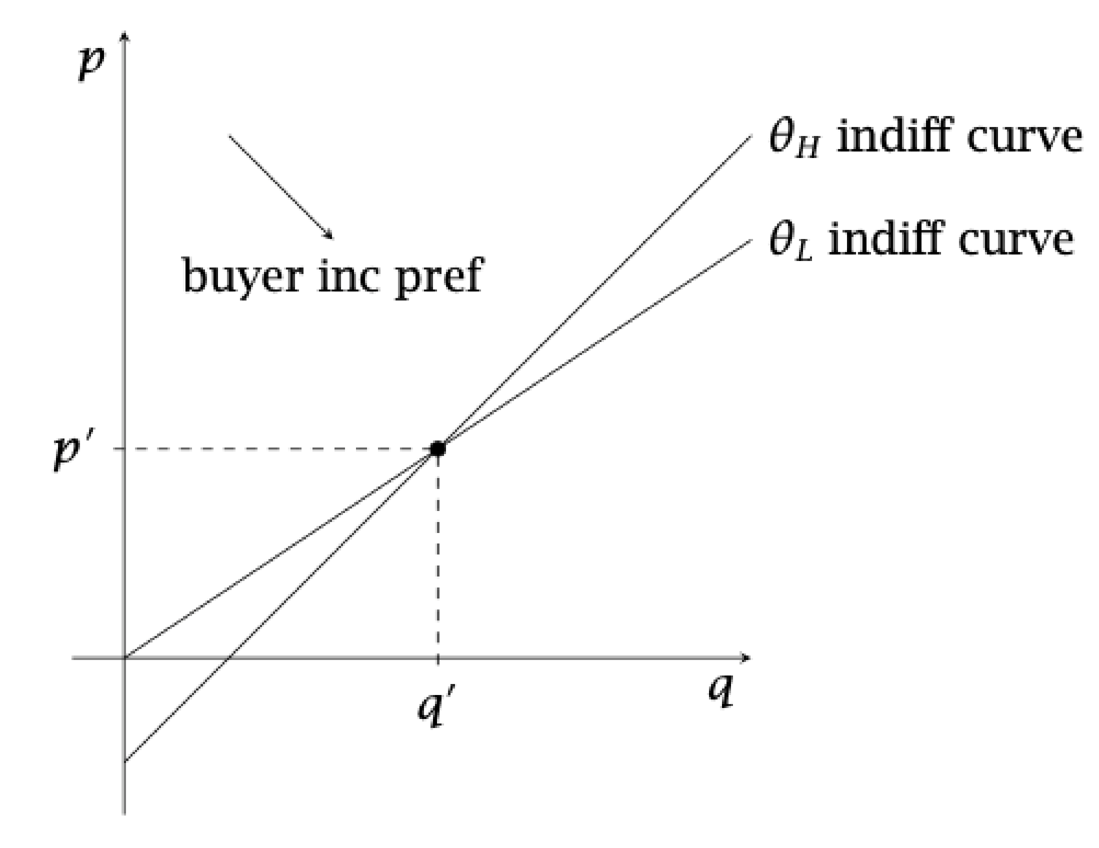


图 1: 内点解中, 不同类型消费者的无差异曲线.

1. 约束 IR_L 是紧的, 因此该消费者的无差异曲线通过原点 (消费者对于"买"和"不买"无差异)
2. 约束 IR_H 是松的: 消费者 θ_H 的均衡效用为正.

- 这些消费者 θ_H 的正剩余 (positive surplus) 被称为**信息租** (information rent)

拉格朗日函数

$$
\begin{aligned}
L = & \alpha_L \left(p_L - c\left(q_L\right)\right) + \alpha_H \left(p_H - c\left(q_H\right)\right) + \\
& \lambda_L \left[\theta_L q_L - p_L - \left(\theta_L q_H - p_H\right)\right] + \lambda_H \left[\theta_H q_H - p_H - \left(\theta_H q_L - p_L\right)\right] + \\
& \mu_L \left[\theta_L q_L - p_L\right] + \mu_H \left[\theta_H q_H - p_H\right].
\end{aligned}
$$

拉格朗日函数

$$
\begin{aligned}
L = & \alpha_L \left(p_L - c\left(q_L\right)\right) + \alpha_H \left(p_H - c\left(q_H\right)\right) + \\
& \lambda_L \left[\theta_L q_L - p_L - \left(\theta_L q_H - p_H\right)\right] + \lambda_H \left[\theta_H q_H - p_H - \left(\theta_H q_L - p_L\right)\right] + \\
& \mu_L \left[\theta_L q_L - p_L\right] + \mu_H \left[\theta_H q_H - p_H\right].
\end{aligned}
$$

内点解的一阶条件:

$$
\begin{aligned}
-\alpha_L c'\left(q_L\right) + \lambda_L \theta_L - \lambda_H \theta_H + \mu_L \theta_L &= 0 \quad (1) \\
\alpha_L - \lambda_L + \lambda_H - \mu_L &= 0 \quad (2) \\
-\alpha_H c'\left(q_H\right) - \lambda_L \theta_L + \lambda_H \theta_H + \mu_H \theta_H &= 0 \quad (3) \\
\alpha_H + \lambda_L - \lambda_H - \mu_H &= 0 \quad (4)
\end{aligned}
$$

均衡中的 q_H

- 内点解中, IR_H 是松的: $\mu_H = 0$.
- 由一阶条件 (4): $\mu_H = 0$, 且 $\lambda_L \geq 0 \implies \lambda_H > 0$.
- 两个激励相容约束中只有一个是紧的 $\implies \lambda_L = 0$
- 一阶条件 (4): $\lambda_H = \alpha_H$.
- 一阶条件 (3) 意味着 q_H 满足 $c'\left(q_H\right) = \theta_H$

注意, $c'\left(q_H\right) = \theta_H$ 对应完全信息下的第一最优均衡产品质量.

- No distortion at the top (高类型产品质量是社会最优的)
- Binding at the bottom (低类型消费者的个体理性约束是紧的)

均衡中的 q_L

从 $\lambda_H = \alpha_H$ 和条件(2) 可得 $\mu_L = 1$.

最后, 由一阶条件 (1) 可得

$$c'\left(q_L\right) = \frac{\theta_L - \alpha_H \theta_H}{\left(1 - \alpha_H\right)}$$

均衡中的 q_L

从 $\lambda_H = \alpha_H$ 和条件(2) 可得 $\mu_L = 1$.

最后, 由一阶条件 (1) 可得

$$c'(q_L) = \frac{\theta_L - \alpha_H \theta_H}{(1 - \alpha_H)}$$

这个式子也给出了内点解的成立条件: $\theta_L > \alpha_H \theta_H$

- 如果 $\theta_L \leq \alpha_H \theta_H$, 均衡时一定有 $q_L = p_L = 0$. 即卖方的产品只覆盖类型 θ_H 消费者, 而不覆盖类型 θ_L 的消费者.

均衡中的价格

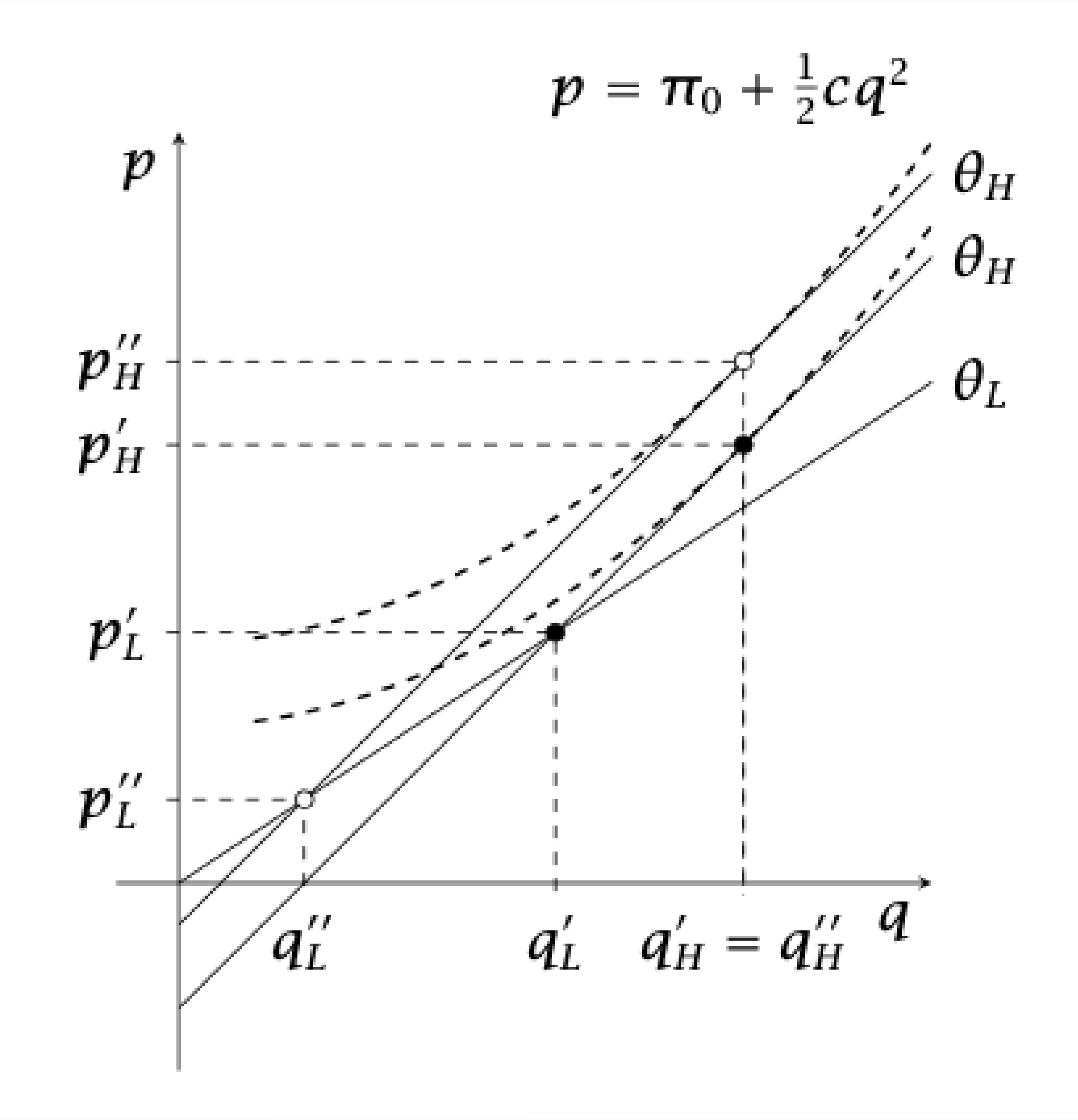
确定了均衡中的 q_L 和 q_H 后, 价格 p_L 和 p_H 由紧的 IR_L 和紧的 IC_H 条件决定.

比较静态分析

问: 随着 α_H 变大 (即高类型消费者比例变多), 最优筛选合同会如何变化?

- 随着 α_H 的增加, q_L 会不断下降, 直到 $q_L = 0$ (即完全放弃低类型消费者市场)
- q_H 不变, p_H 变高
- q_L, p_L 均变低

假设成本函数为二次函数: $\frac{1}{2}cq^2$.
下图反映了(内点解中) α''_H 和 α'_H 下的最优合同, 其中 $\alpha''_H > \alpha'_H$



高类型消费者比例从 α'_H 提高到 α''_H:

- 随着高类型消费者变多, 卖方倾向于提高 p_H, 降低均衡中高类型消费者的信息租
- 同时, 为了维持 IC_H 条件, 卖方必须使低价值合同对高类型消费者的价值降低: 降低 q_L 或降低 p_L
- 为了维持条件 IR_L 来留住低类型消费者, 卖方会同时降低 q_L 和 p_L, 新的均衡中 IR_L 仍是紧的.

小结

- 当低类型消费者占比足够小时, 卖家会放弃低类型消费者市场, 只服务高类型消费者市场.
  - 文字解释: 如果卖家同时服务两类消费者, 激励相容条件下必须给高类型消费者让利 (支付信息租). 如果低类型消费者市场很小, 卖家会放弃这些"蝇头小利", 转而只服务高类型消费者, 这时不必给高类型消费者让利.
- 内点解中, 低类型消费者的剩余永远为零, 高类型消费者的剩余为正, 并且商品质量 q_H 是社会最优的.
  - Binding at the bottom; no distortion at the top.
- 高类型消费者的激励相容约束是紧的.

从筛选到机制设计

筛选: 卖家选择两类产品及相关价格: $\{(q_L, p_L), (q_H, p_H)\}$, 类型为 θ_L 和 θ_H 的消费者会选择对应的商品.

从筛选到机制设计

筛选: 卖家选择两类产品及相关价格: $\{(q_L, p_L), (q_H, p_H)\}$, 类型为 θ_L 和 θ_H 的消费者会选择对应的商品.

这等价于卖方直接让每个消费者报告各自的类型 θ. 考虑如下博弈:

1. 卖方事先承诺: $\{p(\theta), q(\theta)\}$
2. 消费者报告自己的类型 θ, 随后获得商品 $q(\theta)$ 并支付 $p(\theta)$.

如果卖方事先承诺的 $\{p(\theta), q(\theta)\}$ 满足约束 $(IC_L), (IC_H), (IR_L)$ 和 (IR_H), 每个类型的消费者都会主动参与这个博弈并如实报告自己的类型.

筛选: 连续类型

- 消费者的可能类型 θ 构成区间 $\Theta = [\underline{\theta}, \bar{\theta}]$
    - θ 的密度函数为 f
    - 假设 $f(\theta) > 0, \forall\theta \in [\underline{\theta}, \bar{\theta}]$

筛选: 连续类型

- 消费者的可能类型 θ 构成区间 $\Theta = [\underline{\theta}, \bar{\theta}]$
  - θ 的密度函数为 f
  - 假设 $f(\theta) > 0, \forall \theta \in [\underline{\theta}, \bar{\theta}]$
- 卖家选择一组产品质量和价格: $\{(q(\theta), p(\theta)) : \theta \in [\underline{\theta}, \bar{\theta}]\}$
  - 合同 $(q(\theta), p(\theta))$ 专门针对消费者 θ, 需满足对应的激励相容和个体理性约束.

卖家最优化问题

卖方选择一对函数, $p(\theta)$ 和 $q(\theta)$, 来最大化其期望利润:

$$\int_{\Theta}\Big(p(\theta)-c(q(\theta))\Big)f(\theta)d\theta$$

卖家最优化问题

卖方选择一对函数, $p(\theta)$ 和 $q(\theta)$, 来最大化其期望利润:

$$\int_{\Theta} \Big(p(\theta) - c(q(\theta)) \Big) f(\theta) d\theta$$

约束条件如下:

$$\forall \theta, \hat{\theta} \in [\underline{\theta}, \bar{\theta}] \quad \theta q(\theta) - p(\theta) \geq \theta q(\hat{\theta}) - p(\hat{\theta}) \qquad (IC_{\theta,\hat{\theta}})$$

$$\forall \theta \in [\underline{\theta}, \bar{\theta}] \quad \theta q(\theta) - p(\theta) \geq 0 \qquad (IR_{\theta})$$

虚拟价值 (virtual value)

定义虚拟价值 (virtual value)

$$\psi(\theta) = \theta - \frac{1 - F(\theta)}{f(\theta)}$$

核心假设: 虚拟价值 $\psi(\theta)$ 是递增的

- 这个假设本质上是对分布 f 的假设.
- 若虚拟价值 $\psi(\theta)$ 是递增的, 称此时的分布函数 f 是正则的 (regular).
- 请验证: 若 f 是(不严格)递增的, 则 f 一定是正则的.

注: 正则假设很难推广到高维类型的情形.

理解虚拟价值

筛选问题中, 为了让每个消费者如实报告自己的类型, 卖家必须给"高类型"消费者提供信息租.

- $\psi(\theta) = \theta - \frac{1-F(\theta)}{f(\theta)}$

分布函数 f 是正则的 $\iff$ 类型 θ 更高的消费者具有更高的虚拟价值

均衡时, 卖家只会服务虚拟价值为正的消费者

- 由于 f 是正则的, 这意味着卖家只会服务类型足够高的消费者

卖家最优化问题的解

- 令 θ^* 为满足 $\psi(\theta) \geq 0$ 的最小 θ.
- 对 $\theta \geq \theta^*$, 令 $q(\theta)$ 为方程 $\psi(\theta) = c'(q)$ 的解. (请验证, $q(\theta)$是递增的.)

卖家最优化问题的解 $(q^*(\theta), p^*(\theta))$ 如下:

$$q^*(\theta) = \begin{cases} 0, & \theta < \theta^* \\ q(\theta), & \theta \geq \theta^* \end{cases}$$

$$p^*(\theta) = \theta q^*(\theta) - \int_{\underline{\theta}}^{\theta} q^*(\tilde{\theta}) d\tilde{\theta}$$

练习: 令 $C(q) = q^2/2$. 假设类型 θ 服从 $[0,1]$ 上的均匀分布. 记 θ 的密度函数为 f.

1. 验证 f 是正则的.
2. 计算 $(q^*(\theta), p^*(\theta))$.