

线性激励合同

- 委托人: 公司
- 代理人: 打工人张三

- 委托人: 公司
- 代理人: 打工人张三
- **连续行动:** 张三选择努力程度 $a \in [0, \infty)$
 - 张三越努力干活, 他的产出 (q) 一般而言也会越高.

模型设定

- 委托人: 公司
- 代理人: 打工人张三
- **连续行动:** 张三选择努力程度 $a \in [0, \infty)$
 - 张三越努力干活, 他的产出 (q) 一般而言也会越高.
- **连续产出:** 假设 $q = a + \varepsilon$, 其中 $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2)$.
 - 为了简化分析, 我们这里选择最简单的连续概率分布 (i.e., **正态分布**).
 - 实际研究中, 研究人员会考虑更一般的概率分布 $f(q | a)$, f 表示给定努力程度 a 时产出 q 的分布函数.

- 道德风险问题:
 - 公司提供的工资只能由产出 q 决定, 不能由张三的行动 a 决定.
- **线性合同**: $w(q) = w_0 + bq$
 - w_0 是固定工资, b 是奖金率.
 - 线性合同由参数 (w_0, b) 决定

线性合同

- 道德风险问题:
 - 公司提供的工资只能由产出 q 决定, 不能由张三的行动 a 决定.
- **线性合同**: $w(q) = w_0 + bq$
 - w_0 是固定工资, b 是奖金率.
 - 线性合同由参数 (w_0, b) 决定
- 问: 线性合同有哪些现实例子?

线性合同

- 道德风险问题:
 - 公司提供的工资只能由产出 q 决定, 不能由张三的行动 a 决定.
- **线性合同**: $w(q) = w_0 + bq$
 - w_0 是固定工资, b 是奖金率.
 - 线性合同由参数 (w_0, b) 决定
- 问: 线性合同有哪些现实例子?
 - 计件工资
 - 高校科研奖励 (如一篇 A1 级别的论文奖励 20 万)
 - 律师, 医生等专业服务 (如一台普通手术报酬 5 千, 一起诉讼案报酬 2 万, 等等)

1. 公司提供线性合同: $w(q) = w_0 + bq$.

1. 公司提供线性合同: $w(q) = w_0 + bq$.
2. 张三选择是否接受合同:
 - 如果张三接受, 则博弈进入下一个时点.
 - 如果张三拒绝, 博弈结束. 张三获得保留效用 \underline{U} , 公司获得利润 0.

1. 公司提供线性合同: $w(q) = w_0 + bq$.
2. 张三选择是否接受合同:
 - 如果张三接受, 则博弈进入下一个时点.
 - 如果张三拒绝, 博弈结束. 张三获得保留效用 \underline{U} , 公司获得利润 0.
3. 张三选择努力程度 $a \in A \equiv [0, \infty]$.

1. 公司提供线性合同: $w(q) = w_0 + bq$.
2. 张三选择是否接受合同:
 - 如果张三接受, 则博弈进入下一个时点.
 - 如果张三拒绝, 博弈结束. 张三获得保留效用 \underline{U} , 公司获得利润 0.
3. 张三选择努力程度 $a \in A \equiv [0, \infty]$.
4. 公司和张三均观测到产出 $q = a + \varepsilon$, 其中 $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2)$.
公司按照合同 $w(q)$ 支付报酬给张三, 博弈结束.

公司是风险中性的, 其目标是最大化期望利润.

- 公司利润函数为 $q - w(q)$

效用函数

公司是风险中性的, 其目标是最大化期望利润.

- 公司利润函数为 $q - w(q)$

张三是风险厌恶的, 他的效用函数满足恒定绝对风险规避 (CARA):

$$- \exp(-r[w(q) - C(a)]) \equiv -e^{-r[w(q) - C(a)]}$$

其中:

- 张三的努力成本: $C(a) = ca^2/2$, 其中 $c > 0$ 是外生给定的.
- $r > 0$ 衡量了张三的绝对风险厌恶程度

用逆向归纳法求解公司的最优合同.

1. 在观察到线性合同 (w_0, b) 后, 张三选择行动 a^* 来最大化其期望效用.
2. 公司预期到张三的行动 a^* , 选择合同 (w_0, b) 来最大化其期望利润.

用逆向归纳法求解公司的最优合同.

1. 在观察到线性合同 (w_0, b) 后, 张三选择行动 a^* 来最大化其期望效用.
2. 公司预期到张三的行动 a^* , 选择合同 (w_0, b) 来最大化其期望利润.

求解方法类似双寡头先后定产的 Stackelberg 模型.

基准情形: 无道德风险

考虑不存在道德风险的基准 (benchmark) 情形:

- 公司可以直接监督张三的行动
- 此时, 公司在设计工资合约时, 可以直接规定张三的努力程度 a .
 - 比如, 如果张三的努力程度不等于 a , 就不支付任何报酬.

基准情形: 无道德风险

考虑不存在道德风险的基准 (benchmark) 情形:

- 公司可以直接监督张三的行动
- 此时, 公司在设计工资合约时, 可以直接规定张三的努力程度 a .
 - 比如, 如果张三的努力程度不等于 a , 就不支付任何报酬.
- 公司的最优合同只包含两个参数:
 - 张三的努力程度 a
 - 当张三的努力程度为 a 时, 公司支付的报酬 w
- 记此时的合同为 (a, w)

基准情形: IR 约束是紧的

给定合同 (a, w) :

$$\mathbb{E}[-\exp(-r(w - C(a)))] \geq \underline{U} \quad (\text{IR})$$

基准情形: IR 约束是紧的

给定合同 (a, w) :

$$\mathbb{E}[-\exp(-r(w - C(a)))] \geq \underline{U} \quad (\text{IR})$$

更高的工资会减少公司的利润, 因此均衡中 (IR) 约束是紧的:

$$w^*(a) = C(a) - \frac{\ln(-U)}{r}$$

- 上述方程给出了公司的最优基本工资 $w^*(a)$ 作为张三行动 a 的函数.

基准情形: IR 约束是紧的

给定合同 (a, w) :

$$\mathbb{E}[-\exp(-r(w - C(a)))] \geq \underline{U} \quad (\text{IR})$$

更高的工资会减少公司的利润, 因此均衡中 (IR) 约束是紧的:

$$w^*(a) = C(a) - \frac{\ln(-U)}{r}$$

- 上述方程给出了公司的最优基本工资 $w^*(a)$ 作为张三行动 a 的函数.

公司的最优化问题简化为选择某个最优行动 a

基准情形: 公司最优合同

将 $w^*(a)$ 代入公司的目标函数: $\mathbb{E}[a + \varepsilon - w]$

$$\max_a \left[a - ca^2/2 - \frac{\ln(-\underline{U})}{r} \right]$$

基准情形: 公司最优合同

将 $w^*(a)$ 代入公司的目标函数: $\mathbb{E}[a + \varepsilon - w]$

$$\max_a \left[a - ca^2/2 - \frac{\ln(-U)}{r} \right]$$

一阶条件: $1 - ca = 0$

基准情形: 公司最优合同

将 $w^*(a)$ 代入公司的目标函数: $\mathbb{E}[a + \varepsilon - w]$

$$\max_a \left[a - ca^2/2 - \frac{\ln(-\underline{U})}{r} \right]$$

一阶条件: $1 - ca = 0$

无道德风险时, 公司的最优合同:

$$a^* = \frac{1}{c} \quad w^* = -\frac{\ln(-\underline{U})}{r} + \frac{1}{2c}$$

基准情形: First-best 结果

- 由于 IR 是紧的, 张三均衡中的福利一定为 \underline{U} .
- 此时, 最大化公司利润等价于最大化社会总福利.
 - 这里的“社会“只包括两个参与人: 张三和公司

基准情形: First-best 结果

- 由于 IR 是紧的, 张三均衡中的福利一定为 \underline{U} .
- 此时, 最大化公司利润等价于最大化社会总福利.
 - 这里的“社会“只包括两个参与者: 张三和公司
- 无道德风险时, 均衡结果实现了最大化社会总福利的“第一最优” (first-best) 结果.

基准情形: First-best 结果

- 由于 IR 是紧的, 张三均衡中的福利一定为 \underline{U} .
- 此时, 最大化公司利润等价于最大化社会总福利.
 - 这里的“社会“只包括两个参与人: 张三和公司
- 无道德风险时, 均衡结果实现了最大化社会总福利的“第一最优” (first-best) 结果.
 - 我不知道中文如何翻译 first-best. 有些地方将它翻译为“最优“, 但这会和最优反应中的最优 (optimal) 搞混.
 - 我将 first-best 直译为“第一最优”. 如果你知道其它更贴切的翻译, 请告诉我.

基准情形: First-best 结果

First-best 结果中, 张三付出行动 $1/c$, 并获得给定工资 w^* .

- 张三不承担风险
- 解释: 由于张三是风险厌恶的, 而公司是风险中性的, 并且张三在基准情形中不选择行动, 让张三承担风险一定不是社会最优的.

假设公司不能直接监督张三的行动.

- 为了让张三付出努力 a , 公司必须提供对应的满足**激励相容约束**的工资合同.

此时的均衡结果称为次优的 (second-best).

若随机变量 Y 服从对数正态分布:

1. $Z = \ln Y$
2. $Z \sim N(\mu, \sigma^2)$

预备知识

若随机变量 Y 服从对数正态分布:

1. $Z = \ln Y$
2. $Z \sim N(\mu, \sigma^2)$

则 Y 的期望为:

$$\mathbb{E}[Y] = \exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)$$

预备知识

若随机变量 Y 服从对数正态分布:

1. $Z = \ln Y$
2. $Z \sim N(\mu, \sigma^2)$

则 Y 的期望为:

$$\mathbb{E}[Y] = \exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)$$

注意: Y 的期望不仅和 μ 有关, 也和 σ^2 有关.

- 较大的方差 (σ^2) 会导致更多的异常值 Z
- 指数变换 $Y = e^Z$ 会放大那些极大异常值 Z 对 Y 期望的影响; 同时, 那些极小异常值 Z 对 Y 期望的影响几乎不变 (此时 e^Z 几乎为零)

张三最优化问题

张三的最优化问题:

$$\max_{a \geq 0} \mathbb{E} \left[-e^{-r[w(q) - C(a)]} \right]$$

- 其中 $w(q) - C(a) = w_0 + bq - ca^2/2$.

张三最优化问题

张三的最优化问题:

$$\max_{a \geq 0} \mathbb{E} \left[-e^{-r[w(q) - C(a)]} \right]$$

- 其中 $w(q) - C(a) = w_0 + bq - ca^2/2$.

简化目标函数:

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left\{ -e^{-r[w_0 + b(a + \varepsilon) - ca^2/2]} \right\} \\ &= -e^{-r[w_0 + ba - ca^2/2]} \mathbb{E} \left[e^{-rb\varepsilon} \right] \\ &= -e^{-r[w_0 + ba - ca^2/2]} e^{\frac{1}{2}r^2 b^2 \sigma^2} \end{aligned}$$

张三的最优化问题简化为

$$\max_a w_0 + ba - ca^2/2 - rb^2\sigma^2/2$$

张三最优化问题

张三的最优化问题简化为

$$\max_a w_0 + ba - ca^2/2 - rb^2\sigma^2/2$$

一阶条件:

$$a^* = b/c$$

- 张三的最优努力程度 a^* 正比于奖金率 b , 反比于努力成本的参数 c

公司最优化问题的目标函数:

$$\mathbb{E}[a + \varepsilon - w_0 - b(a + \varepsilon)] = (1 - b)a - w_0$$

公司最优化问题

公司最优化问题的目标函数:

$$\mathbb{E}[a + \varepsilon - w_0 - b(a + \varepsilon)] = (1 - b)a - w_0$$

约束条件:

$$a = a^* = \frac{b}{c}$$

$$w_0 + \frac{b^2}{2} \left(\frac{1}{c} - r\sigma^2 \right) \geq \frac{u}{r}$$

- 第一个约束是激励相容约束 (IC), 第二个约束是个体理性 (IR), 其中 $\underline{u} = \ln(-\underline{U})$.

公司最优化问题

均衡中, IR 约束是紧的.

- $w_0 = \frac{u}{r} - \frac{b^2}{2} \left(\frac{1}{c} - r\sigma^2 \right)$

代入到公司的目标函数, 得到无约束最优化问题:

$$\max_b \left\{ \frac{(1-b)b}{c} + \frac{b^2}{2} \left(\frac{1}{c} - r\sigma^2 \right) - \frac{u}{r} \right\}$$

公司最优合同

公司最优合同:

$$b^* = \frac{1}{1 + rc\sigma^2}$$

$$w_0^* = \frac{u}{r} - \frac{1 - rc\sigma^2}{2c^2(1 + rc\sigma^2)^2}$$

公司最优合同

公司最优合同:

$$b^* = \frac{1}{1 + rc\sigma^2}$$

$$w_0^* = \frac{u}{r} - \frac{1 - rc\sigma^2}{2c^2(1 + rc\sigma^2)^2}$$

公司最优合同下, 张三的努力水平为

$$a^* = \frac{1}{c(1 + rc\sigma^2)} < \frac{1}{c}$$

- a^* 总是低于无道德风险情形下的努力水平 $1/c$.

$$b^* = \frac{1}{1 + rc\sigma^2}$$

$$b^* = \frac{1}{1 + rc\sigma^2}$$

问: 公司何时会支付较低的奖金率 b^* ?

$$b^* = \frac{1}{1 + rc\sigma^2}$$

问: 公司何时会支付较低的奖金率 b^* ?

- 张三更厌恶风险; 即 r 较大
- 努力成本更高; 即 c 较大
- 不确定性更大; 即 σ^2 较大.

线性合同假设

问: 线性合同在所有可能的合同中是最优的吗?

- 不是.

考虑如下“阶梯合同”: 公司只在产出高于某给定水平 q_0 时才发高工资 w_H , 否则发低工资 w_L .

$$w^*(q) = \begin{cases} w_H & \text{if } q \geq q_0 \\ w_L & \text{if } q < q_0 \end{cases}$$

线性合同假设

问: 线性合同在所有可能的合同中是最优的吗?

- 不是.

考虑如下“阶梯合同”: 公司只在产出高于某给定水平 q_0 时才发高工资 w_H , 否则发低工资 w_L .

$$w^*(q) = \begin{cases} w_H & \text{if } q \geq q_0 \\ w_L & \text{if } q < q_0 \end{cases}$$

- 这个阶梯合同最早由 Mirrlees 提出, 它更常见的英文叫法是 “shoot the Agent” 合同 (Bolton and Dewatripont, 2005).
- 这个名字是一种诙谐的说法, 它表示该合同对张三低产出的惩罚非常严酷: 只要产出没到 q_0 , 就只能拿低工资, 哪怕离 q_0 只差一点点.

Claim: 通过适当选择 w_H, w_L 和 q_0 , 公司的期望利润可以无限逼近第一最优情形.

- 证明略去. 感兴趣的同学可以查看《合同理论》这本书 (Bolton and Dewatripont, 2005)

Claim: 通过适当选择 w_H, w_L 和 q_0 , 公司的期望利润可以无限逼近第一最优情形.

- 证明略去. 感兴趣的同学可以查看《合同理论》这本书 (Bolton and Dewatripont, 2005)

这个结果严重依赖于 ε 服从正态分布这个假设:

- 如果考虑更一般的产出分布 $f(q | a)$, 阶梯合同下公司的利润就无法任意逼近第一最优情形, 并且此时公司最优(非线性)合同的形式也严重依赖分布 f 的假设.
- 公司的最优(非线性)合同非常**不稳健**.

虽然线性合同对公司几乎永远不是最优的, 但它在现实中广泛存在.

稳健性, 简洁性, 动态一致性

虽然线性合同对公司几乎永远不是最优的, 但它在现实中广泛存在.

Holmström and Milgrom (1987) 认为, 线性合同的优势在于其**稳健性**, 但严格描述这里的稳健性需要使用非贝叶斯 (non-bayesian) 模型.

It is probably the **great robustness** of linear rules based on aggregates that accounts for their popularity. That point is not made as effectively as we would like by our model; we suspect that it cannot be made effectively in any traditional Bayesian model. But issues of robustness lie at the heart of explaining any incentive scheme which is expected to work well in practical environments.

稳健性, 简洁性, 动态一致性

虽然线性合同一般都不是公司最优的, 但相比于复杂的非线性合同, 线性合同的好处在于:

1. **(稳健性)** 非线性最优合同不稳健, 对模型的特定假设 (例如 ε 的分布函数) 很敏感.
 - 如何论证线性合同的稳健性, 至今仍是**比较活跃**的信息经济学研究前沿.

稳健性, 简洁性, 动态一致性

虽然线性合同一般都不是公司最优的, 但相比于复杂的非线性合同, 线性合同的好处在于:

1. **(稳健性)** 非线性最优合同不稳健, 对模型的特定假设 (例如 ε 的分布函数) 很敏感.
 - 如何论证线性合同的稳健性, 至今仍是**比较活跃**的信息经济学研究前沿.
2. **(简洁性)**: 线性合同更容易理解和描述.
 - 如何从理论上严格说明**简单合同** (simple contracts) 所能带来的实际好处, 是今天**非常活跃**的机制设计研究前沿.

稳健性, 简洁性, 动态一致性

虽然线性合同一般都不是公司最优的, 但相比于复杂的非线性合同, 线性合同的好处在于:

1. **(稳健性)** 非线性最优合同不稳健, 对模型的特定假设 (例如 ε 的分布函数) 很敏感.
 - 如何论证线性合同的稳健性, 至今仍是**比较活跃**的信息经济学研究前沿.
2. **(简洁性):** 线性合同更容易理解和描述.
 - 如何从理论上严格说明**简单合同** (simple contracts) 所能带来的实际好处, 是今天**非常活跃**的机制设计研究前沿.
3. **(动态一致性)** 对于动态情形, 非线性合同往往是动态不一致的.
 - 以前面的“阶梯合同”为例. 在产出达到 q_0 后, 张三会立刻停止所有努力.
 - 这时, 公司很可能会反悔, 为张三的额外努力提供激励 (或惩罚不干事的张三)

线性合同不存在动态不一致问题.