

求解最优化问题 $\mathcal{M}$

数值解 vs 解析解

$$\max_{w_1, w_0 \in \mathbb{R}} p_1(\pi_1 - w_1) + (1 - p_1)(\pi_0 - w_0) \quad \text{subject to}$$

$$p_1 u(w_1) + (1 - p_1)u(w_0) - l \geq \underline{u} \quad (\text{IR})$$

$$(p_1 - p_0)[u(w_1) - u(w_0)] \geq l \quad (\text{IC})$$

- 该最优化问题 $\mathcal{M}$ 具有如下性质
 - 目标函数关于决策变量 w_0, w_1 是线性的
 - IC 约束条件对应的 (w_0, w_1) 集合是凸的, IR 约束条件对应的 (w_0, w_1) 集合是非凸的 (见课程网站的图例)

数值解 vs 解析解

$$\max_{w_1, w_0 \in \mathbb{R}} p_1(\pi_1 - w_1) + (1 - p_1)(\pi_0 - w_0) \quad \text{subject to}$$

$$p_1 u(w_1) + (1 - p_1)u(w_0) - l \geq \underline{u} \quad (\text{IR})$$

$$(p_1 - p_0)[u(w_1) - u(w_0)] \geq l \quad (\text{IC})$$

- 该最优化问题 $\mathcal{M}$ 具有如下性质
 - 目标函数关于决策变量 w_0, w_1 是线性的
 - IC 约束条件对应的 (w_0, w_1) 集合是凸的, IR 约束条件对应的 (w_0, w_1) 集合是非凸的 (见课程网站的图例)
- 如果给定了模型参数 (效用函数 u , p_1 , π_1 , l , 等等), 常见的数值计算软件都可以直接求解最优化问题 $\mathcal{M}$.
 - 这样得到的解是**数值解**

数值解 vs 解析解

$$\max_{w_1, w_0 \in \mathbb{R}} p_1(\pi_1 - w_1) + (1 - p_1)(\pi_0 - w_0) \quad \text{subject to}$$

$$p_1 u(w_1) + (1 - p_1)u(w_0) - l \geq \underline{u} \quad (\text{IR})$$

$$(p_1 - p_0)[u(w_1) - u(w_0)] \geq l \quad (\text{IC})$$

但是, 对于经济学专业的学生, 只有数值解通常是不够的.

- 你需要找到问题 $\mathcal{M}$ 的**解析解**.
- **解析解**: 满足 (IR) 和 (IC) 约束且最大化公司利润的最优合同 (w_0^*, w_1^*) 的表达式

数值解 vs 解析解

我们以方程 $x^2 = a$ 为例说明数值解和解析解的不同.

数值解 vs 解析解

我们以方程 $x^2 = a$ 为例说明数值解和解析解的不同.

- 解析解: $x = \sqrt{a}$
 - 解析解需要直接给出(内生变量的)表达式
 - 常见**符号计算软件包**: Mathematica, Maple, SymPy 等

数值解 vs 解析解

我们以方程 $x^2 = a$ 为例说明数值解和解析解的不同.

- 解析解: $x = \sqrt{a}$
 - 解析解需要直接给出(内生变量的)表达式
 - 常见**符号计算软件包**: Mathematica, Maple, SymPy 等
- 数值解
 - 代入 $a = 2$, 数值解为 $x = 1.414$; 代入 $a = 3$, 数值解为 $x = 1.732$; ...
 - 数值解不需要给出表达式, 并且通常都是非精确解
 - 常见**数值计算软件包**: MatLab, Julia, NumPy 等

数值解 vs 解析解

绝大多数经济学研究只关注**解析解**.

- 一般来说, 只有得到了解析解, 才能进行比较静态分析, 并进一步刻画均衡的各类性质 (福利性质, 稳定性等)
- 借助计算机, 数值解通常容易求得. 因此, 实际研究中, 我一般会先代入具体的参数算一些具体的数值例子. 根据这些数值解, 去猜可能的解析解.

数值解 vs 解析解

绝大多数经济学研究只关注**解析解**.

- 一般来说, 只有得到了解析解, 才能进行比较静态分析, 并进一步刻画均衡的各类性质 (福利性质, 稳定性等)
- 借助计算机, 数值解通常容易求得. 因此, 实际研究中, 我一般会先代入具体的参数算一些具体的数值例子. 根据这些数值解, 去猜可能的解析解.

对于很多经济学模型, 解析解有时很难得到, 这时我们称这个问题是**难以求解的** (intractable).

- 对于难以求解的模型, 如果能找到高效的数值解算法, 也是很大的贡献.

据我所知, 目前还没有现成的符号计算软件, 可以直接给出问题 $\mathcal{M}$ 的解析解.

我们试着找出最优化问题 $\mathcal{M}$ 的解析解. 注意到:

1. 公司总是希望支付尽可能低的工资 w_1, w_0
2. 约束 (IR) 在 w_1, w_0 均较高时才成立
3. 约束 (IC) 在 w_1 (显著) 高于 w_0 时才成立

不等式约束

约束 (IC) 和 (IR) 都是不等式约束.

- 称不等式约束 (IC) 是**紧的** (binding), 若不等式 (IC) 取到等号.
- 否则, 称约束 (IC) 是**非紧的** (or, **松的**).

不等式约束

约束 (IC) 和 (IR) 都是不等式约束.

- 称不等式约束 (IC) 是**紧的** (binding), 若不等式 (IC) 取到等号.
- 否则, 称约束 (IC) 是**非紧的** (or, **松的**).

记 (w_0^*, w_1^*) 为最优化问题 $\mathcal{M}$ 的解.

- 也就是说, (w_0^*, w_1^*) 满足约束 (IR) 和 (IC), 并且最大化了公司的期望利润.

不等式约束

约束 (IC) 和 (IR) 都是不等式约束.

- 称不等式约束 (IC) 是**紧的** (binding), 若不等式 (IC) 取到等号.
- 否则, 称约束 (IC) 是**非紧的** (or, **松的**).

记 (w_0^*, w_1^*) 为最优化问题 $\mathcal{M}$ 的解.

- 也就是说, (w_0^*, w_1^*) 满足约束 (IR) 和 (IC), 并且最大化了公司的期望利润.

我们接下来证明, 在 (w_0^*, w_1^*) 处, 约束 (IC) 和 (IR) 都是紧的.

(IR) 约束是紧的

引理一: 在最优化问题 $\mathcal{M}$ 的解 (w_0^*, w_1^*) 处, 约束 (IR) 一定是紧的.

(IR) 约束是紧的

引理一: 在最优化问题 $\mathcal{M}$ 的解 (w_0^*, w_1^*) 处, 约束 (IR) 一定是紧的.

- **(反证)** 反设约束 (IR) 在 (w_0^*, w_1^*) 处是非紧的.
- **(微扰)** 我们可以将 w_0^* 和 w_1^* 分别降低 ε_0 和 ε_1 .

(IR) 约束是紧的

引理一: 在最优化问题 $\mathcal{M}$ 的解 (w_0^*, w_1^*) 处, 约束 (IR) 一定是紧的.

- **(反证)** 反设约束 (IR) 在 (w_0^*, w_1^*) 处是非紧的.
- **(微扰)** 我们可以将 w_0^* 和 w_1^* 分别降低 ε_0 和 ε_1 .
- 存在 $\varepsilon_0 > 0$ 和 $\varepsilon_1 > 0$, 使得 $(w_0^* - \varepsilon_0, w_1^* - \varepsilon_1)$ 也满足 (IR) 和 (IC) 约束. **(为什么?)**

(IR) 约束是紧的

引理一: 在最优化问题 $\mathcal{M}$ 的解 (w_0^*, w_1^*) 处, 约束 (IR) 一定是紧的.

- **(反证)** 反设约束 (IR) 在 (w_0^*, w_1^*) 处是非紧的.
- **(微扰)** 我们可以将 w_0^* 和 w_1^* 分别降低 ε_0 和 ε_1 .
- 存在 $\varepsilon_0 > 0$ 和 $\varepsilon_1 > 0$, 使得 $(w_0^* - \varepsilon_0, w_1^* - \varepsilon_1)$ 也满足 (IR) 和 (IC) 约束. **(为什么?)**
- 公司提供合同 $(w_0^* - \varepsilon_0, w_1^* - \varepsilon_1)$ 可以获得更高的利润. 矛盾.

(IC) 约束是紧的

引理二: 在最优化问题 $\mathcal{M}$ 的解 (w_0^*, w_1^*) 处, 约束 (IC) 一定是紧的.

证明方式仍然是微扰法, 具体思路如下:

(IC) 约束是紧的

引理二: 在最优化问题 $\mathcal{M}$ 的解 (w_0^*, w_1^*) 处, 约束 (IC) 一定是紧的.

证明方式仍然是微扰法, 具体思路如下:

- 反设 (w_0^*, w_1^*) 处 (IC) 是松的. 根据引理一, (w_0^*, w_1^*) 处 (IR) 约束是紧的.
 - 我们不能同时下调 w_0^* 和 w_1^* , 否则会违反 (IR).

(IC) 约束是紧的

引理二: 在最优化问题 $\mathcal{M}$ 的解 (w_0^*, w_1^*) 处, 约束 (IC) 一定是紧的.

证明方式仍然是微扰法, 具体思路如下:

- 反设 (w_0^*, w_1^*) 处 (IC) 是松的. 根据引理一, (w_0^*, w_1^*) 处 (IR) 约束是紧的.
 - 我们不能同时下调 w_0^* 和 w_1^* , 否则会违反 (IR).
- **(微扰)** 将 w_1 下调 $\frac{1-p_1}{u'(w_1)}\varepsilon$, 将 w_0 上调 $\frac{p_1}{u'(w_0)}\varepsilon$

(IC) 约束是紧的

引理二: 在最优化问题 $\mathcal{M}$ 的解 (w_0^*, w_1^*) 处, 约束 (IC) 一定是紧的.

证明方式仍然是微扰法, 具体思路如下:

- 反设 (w_0^*, w_1^*) 处 (IC) 是松的. 根据引理一, (w_0^*, w_1^*) 处 (IR) 约束是紧的.
 - 我们不能同时下调 w_0^* 和 w_1^* , 否则会违反 (IR).
- **(微扰)** 将 w_1 下调 $\frac{1-p_1}{u'(w_1)}\varepsilon$, 将 w_0 上调 $\frac{p_1}{u'(w_0)}\varepsilon$
- **证明 (习题二的附加题):** 只要 $\varepsilon > 0$ 足够小, 通过上述微扰得到的新工资合同仍然满足 (IC) 和 (IR) 约束, 并且严格提高了公司的期望利润.

最优化问题 $\mathcal{M}$ 的解, 在 (IR) 和 (IC) 约束均取等号时实现.

$$p_1 u(w_1) + (1 - p_1)u(w_0) = \underline{u} + l$$

$$(p_1 - p_0)[u(w_1) - u(w_0)] = l$$

最优化问题 $\mathcal{M}$ 的解, 在 (IR) 和 (IC) 约束均取等号时实现.

$$p_1 u(w_1) + (1 - p_1)u(w_0) = \underline{u} + l$$

$$(p_1 - p_0)[u(w_1) - u(w_0)] = l$$

这时有两个等式和两个未知数:

- 紧的 (IR) 条件决定了张三的效用水平 $\underline{u} + l$
- 紧的 (IC) 条件决定了 w_1 和 w_0 的差值

联立求解, 得到 w_1^* 和 w_0^* , 再代入最优化问题的目标函数可以求得公司的期望利润.

最优化问题 $\mathcal{M}$ 的解

令 $l = 1$, 联立紧的 (IR) 和 (IC) 条件可得:

$$u(w_0^*) = \underline{u} - \frac{p_0}{p_1 - p_0} \quad u(w_1^*) = \underline{u} + \frac{1 - p_0}{p_1 - p_0}$$

公司对应的期望利润:

$$p_1(\pi_1 - w_1^*) + (1 - p_1)(\pi_0 - w_0^*)$$

问: 最优化问题 $\mathcal{M}$ 的解, 一定是公司的最优合同么?

问: 最优化问题 $\mathcal{M}$ 的解, 一定是公司的最优合同么?

答: 不一定.

- 最优化问题 $\mathcal{M}$ 的解, 是公司最优的激励合同
- 还存在两种其它可能的“角点解”
 1. 不使用激励合同, 只支付基本工资. (此时没有 IC 约束, 张三在均衡中一定会偷懒)
 2. 公司不雇佣张三 (此时没有 IC 和 IR 约束)

公司最优合同

情形一： 公司使用最优激励合同: w_1^* 和 w_0^*

情形二： 公司仅支付基本工资, 不使用激励合同.

- 基本工资 w 的值由张三的参与约束决定: $u(w) = \underline{u}$

公司最优合同

情形一： 公司使用最优激励合同: w_1^* 和 w_0^*

情形二： 公司仅支付基本工资, 不使用激励合同.

- 基本工资 w 的值由张三的参与约束决定: $u(w) = \underline{u}$
- 以下因素均可能导致公司放弃使用激励合同:
 1. 张三非常厌恶风险
 - 随着张三的风险厌恶程度上升, 公司必须支付更高的**额外激励** ($\Delta w = w_1 - w_0$) 才能满足激励相容约束.
 2. 努力干活带给张三的负效用太大
 3. 努力干活带给公司的边际收益 $((p_1 - p_0)(\pi_1 - \pi_0))$ 不高

情形三：不雇佣张三

- 如果张三的保留效用 $\underline{u}$ 过高, 或者张三负责的项目带给公司的收益很低, 公司雇佣张三的边际成本可以大于雇佣张三带来的边际收益.
 - 此时, 公司的最优选择是不雇佣张三.
 - 最优工资合同为 $w = 0$.

公司的最优合同

最后公司的最优合同肯定是以上三种情形之一.

哪种是哪种情形, 由模型的参数决定:

- 张三的效用函数 $u(w)$
- 张三的保留效用: $\underline{u}$
- 努力工作带给张三的负效用: l
- 张三工作带给公司的期望利润:
 - 成功概率: p_1, p_0
 - 项目收益: π_1, π_0