

机制设计：单物品分配

单物品分配

机制设计最经典的例子是单物品分配问题.

假设雷老师想要出售手头的二手 iPhone, 有 n 位同学感兴趣并参与竞标.
雷老师有两个可能目标:

- 目标一: 最大化这个二手 iPhone 带来的收入
 - 这个目标对应收入最大化 (or, 利润最大化) 机制.
 - 例: 二级价格歧视分析中的卖家最优筛选机制
- 目标二: 把这台 iPhone 分配给最需要他的同学
 - 这个目标对应社会福利最大化的机制.
 - 例: 劳动力市场信号模型中的最优税收

单物品分配: 竞标者行为

- 私人估价: 每个竞标者 i 对 iPhone (or, 标的) 的估价记为 v_i
 - v_i 代表了竞标者 i 的最高支付意愿, 竞标者 i 希望以不高于 v_i 的价格尽可能便宜地获得标的.
 - 假设 v_i 最低可能取值为100元, 最高可能取值为10000元.
- 拟线性效用:
 - 若以价格 p 中标, 则效用为 $v_i - p$
 - 每个竞标者未能中标时的保留效用均为 0

单物品分配: 完全信息情形

若每个竞标人的估价 $v_1, \dots, v_n$ 都是公开信息, 社会最优的分配规则 (allocation rule) 就是直接把标的分配给估价 (v_i) 最高的竞标人.

- 和我们此前分析最优税收的情形类似, 这里的社会最优机制只需要关心标的的分配 (allocation) 问题, 不用关心财富的分配 (distribution) 问题 (也就是竞标人最后的实际支付)
- 因为一块钱带给每个人的效用都相同, 所以最后获胜竞标人张三同学支付的价格是200元还是500元, 不影响社会总福利, 张三同学损失的福利就是雷老师获得的福利.

单物品分配: 不完备信息情形

- 现实中, 每位竞标人的估价 v_i 一般是他的私人信息.
- 雷老师可以直接问竞标人的估价是多少, 但他可能会说谎.
 - 比如, 如果雷老师事先约定的分配机制是将标的分给估价最高的竞标人, 并且竞标人只需要支付 100 元.
 - 这时, 每个竞标人都会宣称自己对这台二手 iPhone 的估价为 10000 元.
- 即使雷老师完全不在意赚钱, 只想把手头的 iPhone 分配给最需要它的竞标学生. 但是, 由于信息不完备, 为了让每个竞标人能如实汇报他的估价, 雷老师也必须对竞标同学收钱 (或提供补贴), 否则雷老师无法得知最后获得 iPhone 的同学是否是 v_i 最高的同学.

单物品分配: 可能的博弈规则

1. 一价密封拍卖, 二价密封拍卖, 三价密封拍卖, ...
2. 英式拍卖, 荷式拍卖
3. 有入场门槛的拍卖: 每个竞标人都要先支付100元, 才能参与接下来的拍卖.
4. 全支付拍卖: 报价最高的竞标人获得标的, 同时每个竞标人 i 都要支付 b_i

上面这些博弈规则都是非随机的, 雷老师还可以在规则中引入随机性:

5. 竞赛 (contest) 博弈: 每个竞标同学 i 都要支付他自己的报价 b_i , 同时他获得标的的概率为 $b_i / \sum_{j=1}^N b_j$.
 - 例: 两位同学参与竞标, 张三报价 100 元, 李四报价 200 元. 最后雷老师的总收入为 300, 张三和李四获得标的的概率分别为 $1/3$ 和 $2/3$.
6. ...

即使在单物品分配这个简单设定下, 可能的博弈规则都有无数多种.

不同规则下, 竞标人的行为也会有很大区别.

- 一价拍卖中, 每个竞标人的竞标价 b_i 会低于 v_i , 具体低多少取决于竞标人 i 对其它竞标人估价(和报价)的信念
- 二价拍卖中, 每个竞标人如实报价 $b_i = v_i$ 总是优势策略 (dominant strategy).
- 竞赛博弈和有入场门槛的拍卖情形你们应该还没有学过, 有兴趣的同学可以思考下如何求解它们的纳什均衡.
- ...

问: 在这些无穷多可能的博弈规则中, 雷老师应该选择哪个博弈规则, 才能实现目标一(最大化收入)或目标二(最大化总福利)?

当你开始思考这个问题时, 你的思维方式就从**博弈论式**思维转向了**机制设计式**思维.

在正式回答这个机制设计问题前, 我们先回顾两个具体的博弈规则:

- 一价拍卖
- 二价拍卖

并分析这两个博弈规则是否能实现目标一或目标二.

一价密封拍卖

假设雷老师使用一价密封拍卖的方式来分配他的二手 iPhone.

- 所有竞标人同时报价: $b_1, \dots, b_n$.
- 给定所有人的报价 $b_1, \dots, b_n$, 最终的分配规则和支付规则如下:
 - 分配规则: 价高者得
 - 出价最高的竞标人会获得雷老师的 iPhone.
 - 如果存在多个出价最高的竞标人, 通过公平抽签的方式随机选择胜者
 - 支付规则: 只有"胜者"需要支付, 并且胜者支付的价格 = 最高竞标价

一价密封拍卖: 信念和效用函数

- 假设每个竞标人的估价 v_i 彼此独立, 且服从 $[0, 1]$ 上的均匀分布.
- 用 p_i 表示除了参与人 i 的竞标价 b_i 外的最高竞标价:

$$p_i = \max\{b_1, \dots, b_{i-1}, b_{i+1}, \dots, b_n\}.$$

- 参与人 i 效用函数 $u_i(v_i, b_i, p_i)$:

$$u_i(v_i, b_i, p_i) = \begin{cases} 0 & \text{若 } b_i < p_i \\ v_i - b_i & \text{若 } b_i > p_i \end{cases}$$

- 暂时不考虑 $b_i = p_i$ 的情形. 后面我们会发现, 这个情形不影响参与人 i 的期望效用.

问: 如何表示竞标人 i 的策略?

- 竞标人 i 的策略为他的类型 (即 v_i) 到报价的映射:

$$b_i(v_i)$$

为了简化分析, 我们仅考虑对称均衡, 即所有竞标人都使用相同的策略

$$b(v_i)$$

我们进一步假设这个策略是线性的:

$$b(v_i) = \alpha v_i + \beta$$

一价密封拍卖的纳什均衡

命题: 若所有参与人都使用线性策略 $b(v_i) = \alpha v_i + \beta$ 构成纳什均衡, 一定有 $\beta = 0$.

证明:

- 考虑参与人 i 的估价 v_i 为 0 的特殊情形, 线性策略下他的竞标价为 $b(0) = \beta$.
- 由于竞标价永远非负, $\beta \geq 0$.
- 若 $\beta > 0$, 此时参与人 i 的期望收益为负, 这个收益严格低于他改报 $b = 0$ 时的收益. 矛盾.
- 因此, $\beta = 0$.

一价密封拍卖的纳什均衡

给定其它参与人策略均为 $b(v) = \alpha v$, 参与人 i 选择竞标价 b_i 来最大化他的期望效用:

$$\max_{b_i} \Pr[b_i > p_i](v_i - b_i)$$

上述目标函数中, 只考虑了 $b_i > p_i$ 情形下参与人 i 的效用. 因为:

- 当 $b_i < p_i$ 时, 参与人 i 收益为 0
- 当 $b_i = p_i$, 参与人 i 的期望收益为正, 但这个事件的概率为零:
 $\Pr[b_i = p_i] = 0$

一价密封拍卖的纳什均衡

$$\Pr[b_i > p_i] = \Pr[b_i > \max\{\alpha v_1, \dots, \alpha v_{i-1}, \alpha v_{i+1}, \dots, \alpha v_n\}] = \prod_{j \neq i} \Pr[b_i > \alpha v_j]$$

- 对任意 $j \neq i$, $\Pr[b_i > \alpha v_j] = b_i / \alpha$. 因此参与人 i 最优化问题为:

$$\max_{b_i} (v_i - b_i) \left(\frac{b_i}{\alpha} \right)^{n-1}$$

- 参与人 i 最优化问题的解为

$$b_i^* = \frac{n-1}{n} v_i.$$

- 因此, 均衡中 $\alpha = \frac{n-1}{n}$. 这验证了我们最开始线性策略的假设.

小结: 一价密封拍卖 (1)

纳什均衡中, 每个参与人的报价策略为

$$b_i^*(v_i) = \frac{n-1}{n} v_i.$$

- $b_i^*(v_i) < v_i$: 参与人 i 的报价永远低于其估价 v_i .
 - 这个结果和我们的直觉一致: 一价拍卖中, 参与人 i 只有报价低于估价时才会有正收益.
- 随着参与拍卖的竞标者不断变多 (n 不断上升), 参与人 i 的报价会不断变大. 当 n 趋于正无穷时, 他的报价会趋于 v_i .
 - 这个结果的直觉如下: 随着 n 变大, 竞标人之间的竞争也变得更激烈, 进而导致均衡中的报价会变高.

小结: 一价密封拍卖 (2)

均衡中, 每个参与人 i 在类型 v_i 时的期望收益为:

$$\frac{v_i}{n} (v_i)^{n-1} = \frac{v_i^n}{n}$$

- 竞标人的均衡收益关于 v_i 递增, 关于 n 递减

均衡中, 卖家的期望收入为

$$\frac{n-1}{n} \mathbb{E}[\max\{v_1, \dots, v_n\}]$$

- 你会算 $\max\{v_1, \dots, v_n\}$ 这个顺序统计量 (order statistic) 的期望吗?

小结: 一价密封拍卖 (3)

- 在求解纳什均衡时, 我们预先假设了参与人的均衡策略是线性的. 幸运的是, 最后的计算结果验证了这个假设.
- 如果你不假设 $b(v)$ 是线性的, 只假设 $b(v)$ 是严格单调递增且可微的, 可以通过求解微分方程的方式得到 $b_i^* = \frac{n-1}{n} v_i$.
 - 数学功底较好的同学可以自行尝试这个解法, 我们在课上就不介绍了.
- 最后的均衡结果, 非常依赖所有 v_i 均独立同分布这个假设.
 - 如果放松这个假设, 均衡结果会发生很大变化.
 - 但是, 二价拍卖的均衡结果完全独立于关于 v_i 分布的假设!

问: 一价拍卖规则下, 能实现社会福利最大化吗?

- 在假设所有人参与人估价独立同分布的线性策略均衡中, 一价拍卖规则实现了目标二 (最大化社会福利)
- 但是, 这个均衡非常依赖关于 v_i 分布的假设. 当你选择其它分布函数时, 均衡结果也会发生变化.
- 并且, 这个线性策略均衡不"稳健": 现实中的一价拍卖基本没有人会严格执行这个策略.
 - 我在博弈论课上, 每年都会做关于一价拍卖的课堂实验. 我会担任"自然"的角色, 从 $[0, 2000]$ 这个区间均匀且独立地抽取每个 v_i 并私下告知同学 i , 但没有同学会报价 $\frac{n-1}{n}v_i$.

问: 一价拍卖规则下, 能实现卖家收入最大化吗?

答: 不知道. 我们现在还无法回答这个问题, 因为我们不知道其它博弈规则下卖家的均衡收入是多少.

线性策略均衡中, 卖家的期望收入为

$$\frac{n-1}{n} \mathbb{E}[\max\{v_1, \dots, v_n\}] = \frac{n-1}{n+1}$$

- 证明留作习题

接下来, 我们对比二价拍卖中卖家的均衡收入.

二价密封拍卖 (也叫 Vickrey 拍卖)

二价拍卖最早由诺贝尔经济学得主 Vickrey 提出, 因此也被称为 Vickrey 拍卖.

二价拍卖的规则如下:

- 所有竞标者同时出价
- 价高者得, 但只需支付第二高的报价, 而非自己的报价.

例:

- 张三出价100元, 李四出价80元, 王五出价90元.
- 结果: 张三获胜, 但只需支付第二高的报价(90), 而不是自己的报价(100)

二价拍卖的好处

- 鼓励真实报价：竞标者不用担心“报高价会吃亏”，因为胜者最后实际支付价格与自己的报价无关。
- 减少博弈操纵：
 - 传统的一价拍卖中，竞标者可能故意压低价格甚至合谋，并且均衡结果难以预测（我们前面求解的均衡，仅仅是每个 v_i 都独立且服从均匀分布时的情形）
 - 二价拍卖中，实话实说总是每个参与人的优势策略。

由于二价拍卖的种种好处，它的各类变种在现实中应用十分广泛：

- 谷歌广告拍卖：实际采用类似二价拍卖的规则，鼓励广告主诚实出价。
- 政府招标：防止投标方恶意抬价或压价。

Vickrey 定理

Vickrey 定理: 对任意参与人 i , 策略 $b_i^*(v_i) = v_i$ 是优势策略.

Vickrey 定理

Vickrey 定理: 对任意参与人 i , 策略 $b_i^*(v_i) = v_i$ 是优势策略.

- v_i = 竞标者 i 的真实估价 (比如你认为商品值100元)
- b_i = 竞标者 i 的实际报价 (可以"撒谎", 比如报80元或120元)
- p_i = 除了参与人 i 外, 其它参与人的最高报价

证明思路:

- 对任意 (v_i, p_i) , 实话实说 (即 $b_i = v_i$) **总是** 参与人 i 的最优反应.
 - 这里的"**总是**"包含三种情况: $v_i < p_i$, $v_i = p_i$, $v_i > p_i$
 - 对上述每一种情况, 分别验证 $b_i = v_i$ 优于行动 $b_i > v_i$ 和行动 $b_i < v_i$ 即可.

	$v_i < p_i$	$v_i = p_i$	$v_i > p_i$
$b_i < v_i$	0	0	$v_i - p_i$ 或 0
$b_i = v_i$	0	0	$v_i - p_i$
$b_i > v_i$	0 或 负	0	$v_i - p_i$

每种情况下, 行动 $b_i = v_i$ 的收益总是最高的. 证毕.

- 说明: 上述证明不需要假设每个 v_i 都是独立同分布的.
- 即使不同的 v_i 服从不同的分布, 或它们彼此相关, 如实报告 $b_i = v_i$ 也是参与人 i 的优势策略.

二价拍卖与最大化社会福利

二价拍卖具有如下**好性质**:

1. **优势策略均衡**: 诚实报价是优势策略

- 每个竞标者的策略很"简单", 因为诚实报价是唯一的优势策略. 这时, 竞标者不用去猜其它竞标者的估值或报价
- 我们可以假设竞标者采用优势策略来预测博弈结果.

2. **社会福利最大化**: 在诚实报价的前提下, 商品会被分配给 v_i 最大的竞标者

二价拍卖实现了我们的目标二 (最大化社会福利), 并且这个实现方式很"可靠".

二价拍卖: 卖家均衡收入

实现了目标二后, 接下来我们考虑目标一:

- 相比一价拍卖, 二价拍卖能否提高卖家均衡收入?
- 若每个 v_i 都独立且服从 $[0, 1]$ 上的均匀分布, 卖家二价拍卖下的期望收入是

$$\mathbb{E}v_{(2)} = (n - 1)/(n + 1)$$

- 其中 $v_{(2)}$ 表示 $(v_1, \dots, v_n)$ 中第二高的值.

卖家二价拍卖下和一价拍卖下的均衡收入完全相同.

- 这是巧合吗? 当然不是.
- Myerson 用机制设计的框架证明了, 在大多数你学过的拍卖中 (一价, 二价, 三价, 全支付拍卖, ...), 卖家的均衡收入都相同.