

最优激励合同（一般情形）

- 目前为止, 我们讨论了如下包含道德风险的最优合同问题:
 1. 二元模型
 2. 连续情形 (只考虑线性合同)
- 接下来我们将讨论更一般的情形.
- 在求解模型前, 我们先介绍带有 **不等式约束** 的最优化问题求解方法:
 - 拉格朗日法

拉格朗日法: Lagrangian

- 高数课堂上, 你们学习过带有**等式约束**的最优化问题求解.

拉格朗日法: Lagrangian

- 高数课堂上, 你们学习过带有**等式约束**的最优化问题求解.

$$\max_{x_1, x_2, \dots, x_k} f(x_1, x_2, \dots, x_k) \quad s.t.$$

$$g_1(x_1, x_2, \dots, x_k) = 0$$

$$g_2(x_1, x_2, \dots, x_k) = 0$$

$$\vdots$$

$$g_n(x_1, x_2, \dots, x_k) = 0$$

拉格朗日法: Lagrangian

- 高数课堂上, 你们学习过带有**等式约束**的最优化问题求解.

$$\max_{x_1, x_2, \dots, x_k} f(x_1, x_2, \dots, x_k) \quad s.t.$$

$$g_1(x_1, x_2, \dots, x_k) = 0$$

$$g_2(x_1, x_2, \dots, x_k) = 0$$

$$\vdots$$

$$g_n(x_1, x_2, \dots, x_k) = 0$$

建立拉格朗日函数:

$$L(x_1, \dots, x_k, \lambda_1, \dots, \lambda_n) = f(x_1, \dots, x_k) + \sum_{i=1}^n \lambda_i g_i(x_1, \dots, x_k)$$

拉格朗日法: Lagrangian

拉格朗日函数 (Lagrangian) 同时包含了目标函数和约束条件, 将原始的**带约束**最优化问题转化为了**无约束**最优化问题:

$$\max_{x_1, \dots, x_k, \lambda_1, \dots, \lambda_n} L(x_1, \dots, x_k, \lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

拉格朗日法: Lagrangian

拉格朗日函数 (Lagrangian) 同时包含了目标函数和约束条件, 将原始的**带约束**最优化问题转化为了**无约束**最优化问题:

$$\max_{x_1, \dots, x_k, \lambda_1, \dots, \lambda_n} L(x_1, \dots, x_k, \lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

要找出原最优化问题的解, 直接对所有的 x 和 λ 求偏导即可:

$$\partial L / \partial x_i = 0 \implies \partial L / \partial x_i + \sum_{i=1}^n \lambda_i \partial g_i(x_1, \dots, x_k) / \partial x_i = 0$$

$$\partial L / \lambda_i = 0 \implies g_i(x_1, \dots, x_k) = 0$$

拉格朗日法: Lagrangian

拉格朗日函数 (Lagrangian) 同时包含了目标函数和约束条件, 将原始的**带约束**最优化问题转化为了**无约束**最优化问题:

$$\max_{x_1, \dots, x_k, \lambda_1, \dots, \lambda_n} L(x_1, \dots, x_k, \lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

要找出原最优化问题的解, 直接对所有的 x 和 λ 求偏导即可:

$$\partial L / \partial x_i = 0 \implies \partial L / \partial x_i + \sum_{i=1}^n \lambda_i \partial g_i(x_1, \dots, x_k) / \partial x_i = 0$$

$$\partial L / \lambda_i = 0 \implies g_i(x_1, \dots, x_k) = 0$$

- 一般来说, 只要目标函数和约束条件的函数都是光滑的, 上述一阶条件就是必要的.
- 如果目标函数是凹的, 并且所有 g_i 都是凸的, 上述一阶条件是充要的.

Kuhn–Tucker 定理

考虑如下最优化问题, 它包含 k 个决策变量 $(x_1, \dots, x_k)$ 和 n 个不等式约束 $(g_1, \dots, g_n)$

$$\max_{x_1, x_2, \dots, x_k} f(x_1, x_2, \dots, x_k) \quad s.t.$$

$$g_1(x_1, x_2, \dots, x_k) \geq 0$$

$$g_2(x_1, x_2, \dots, x_k) \geq 0$$

$$\vdots$$

$$g_n(x_1, x_2, \dots, x_k) \geq 0$$

目标函数 f 是凹的, 所有 g_j 都是凸的.

拉格朗日函数

该最优化问题的拉格朗日函数 (Lagrangian):

$$L(x, \lambda) = f(x_1, x_2, \dots, x_k) + \sum_{j=1}^n \lambda_j g_j(x_1, x_2, \dots, x_k)$$

- Lagrangian 包括目标函数 f 和所有约束 g_j .
- 称约束 g_j 的权重 λ_j 为拉格朗日乘子.

Kuhn–Tucker 定理:

- 若 $x^* = (x_1^*, \dots, x_k^*)$ 和 $\lambda^* = (\lambda_1^*, \dots, \lambda_n^*)$ 为以下无约束最优化问题的解:

$$\max_{x_1, \dots, x_k, \lambda_1 \geq 0, \dots, \lambda_n \geq 0} L(x, \lambda)$$

- 那么 $x^* = (x_1^*, \dots, x_k^*)$ 是原最优化问题的解.

拉格朗日乘子与约束条件:

- 如果 $\lambda_j^* > 0$, 则其对应的约束 $g_j(x)$ 一定是紧的 (即 $g_j(x^*) = 0$)

- 张三有 n 个可能行动: $a \in A \equiv \{a_1, \dots, a_n\}$
- 张三负责的项目由 m 个可能结果: $x \in X \equiv \{x_1, \dots, x_m\}$
- A 和 X 都是实数集的真子集, 并且序列 $\{a_i\}$ 和 $\{x_j\}$ 都是严格递增的.

模型设定

- 给定行动 a_i , 最终结果的可能分布为向量 $\mathbf{p}_i = (p_{i1}, \dots, p_{im})$
 - 其中 $p_{ij} = \Pr[x_j \mid a_i]$ 表示行动 a_i 下最终结果为 x_j 的概率

	x_1	x_2	$\dots$	x_m
a_1	p_{11}	p_{12}	$\dots$	p_{1m}
a_2	p_{21}	p_{22}	$\dots$	p_{2m}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
a_n	p_{n1}	p_{n2}	$\dots$	p_{nm}

- 公司提供工资合同 $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_n)$:
 - 其中 w_j 表示结果 x_j 发生时, 公司支付给张三的工资.

张三的最优化问题

张三的效用函数:

$$u(w) - a$$

- 函数 $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 是严格递增, 且严格凹的

给定工资合同 $(w_1, \dots, w_m)$, 张三选择行动 a_i 最大化其期望效用:

$$\sum_{j=1}^m p_{ij} u(w_j) - a_i$$

- 如果上述最优化问题的解中, 张三的最终效用小于其保留效用 $\underline{u}$, 张三会选择辞职.

公司的最优化问题

公司的最优化问题可以分解为两步:

1. 对每个可能行动 a_i , 设计出对公司来说成本最低的激励相容工资合同 w_i
2. 选择某个公司最优的行动 $a_i^* \in A$

我们接下来主要讨论第一步最优化问题.

公司的最优化问题

- 公司希望张三选择行动 a_i .
- 这对应着 $n - 1$ 个激励相容约束和 1 个个体理性约束:

公司的最优化问题

- 公司希望张三选择行动 a_i .
- 这对应着 $n - 1$ 个激励相容约束和 1 个个体理性约束:

$$\sum_{j=1}^m p_{ij} u(w_j) - a_i \geq \sum_{j=1}^m p_{kj} u(w_j) - a_k \quad \forall k \neq i$$

$$\sum_{j=1}^m p_{ij} u(w_j) - a_i \geq \underline{u}$$

公司的拉格朗日函数

$$L = \sum_{j=1}^m p_{ij}(x_j - w_j) + \sum_{k \neq i} \lambda_k \left[\sum_{j=1}^m (p_{ij} - p_{kj})u(w_j) - (a_i - a_k) \right] \\ + \mu \left(\sum_{j=1}^m p_{ij}u(w_j) - a_i - \underline{u} \right)$$

- λ_k 为约束 $IC_{i,k}$ 的拉格朗日乘子, μ 为约束 IR 的拉格朗日乘子.

公司的拉格朗日函数

关于 w_j 的一阶条件:

$$-p_{ij} + \sum_{k \neq i} \lambda_k (p_{ij} - p_{kj}) u'(w_k) + \mu p_{ij} u'(w_j) = 0$$

等式两边同除 $p_{ij} u'(w_j)$ 可得:

$$\frac{1}{u'(w_j)} = \sum_{k \neq i} \lambda_k (1 - p_{kj}/p_{ij}) + \mu$$

公司的拉格朗日函数

- 最优工资 w_j 取决于哪些约束是紧的 (紧约束意味着其拉格朗日乘子大于 0)
- 如果所有的 IC 约束都是松的, 可以推出:

$$\frac{1}{u'(w_j)} = \mu \quad \forall j$$

- 此时公司支付的工资是恒定的, 和最终结果无关.
 - 这对应着不存在 IC 约束的第一最优情形.

一般情况下, 最优解中有的激励相容约束是紧的.

- 假设激励相容约束在行动 a_k 处是紧的 (此时有 $\lambda_k > 0$), 这会如何影响结果 j 下的工资 w_j ?
- 答案取决于 p_{kj}/p_{ij} 是否大于 1.
 - 如果 p_{kj}/p_{ij} 小于 1, 这会提高 $1/u'(w_j)$, 进而提高 w_j
 - 如果 p_{kj}/p_{ij} 大于 1, 这会降低 $1/u'(w_j)$, 进而降低 w_j

p_{kj}/p_{ij} 的文字说明:

- 结果 j 在行动 k 和行动 i 下的似然比

公司在看到结果 j 时, 关于张三行动的极大似然估计量 a_h 为满足下面不等式的行动 h :

$$p_{kj} \leq p_{hj} \quad \text{for all } k$$

单调似然比 (Monotone Likelihood Ratio)

单调似然比假设: 较高的努力程度下, 好结果发生的概率更高.

- 对任意满足 $j > l$ 的结果 x_j 和 x_l , 似然比 $\frac{p_{ij}}{p_{il}}$ 关于行动 a_i 递增:

$$\frac{p_{ij}}{p_{il}} \geq \frac{p_{kj}}{p_{kl}} \quad \forall k < i$$

在单调似然比假设下, 从行动 a_l 切换到更好的行动 a_i 会增加好结果 x_j 相对于差结果 x_l 的似然性.

单调似然比条件: 例 1

$$p_k = (0.5, 0.3, 0.2) \quad p_i = (0.2, 0.3, 0.5)$$

可以验证, 这两个概率分布满足单调似然比条件.

$$\frac{p_{k3}}{p_{k2}} = \frac{2}{3} < \frac{p_{i3}}{p_{i2}} = \frac{5}{3}$$

$$\frac{p_{k3}}{p_{k1}} = \frac{2}{5} < \frac{p_{i3}}{p_{i1}} = \frac{5}{2}$$

$$\frac{p_{k2}}{p_{k1}} = \frac{3}{5} < \frac{p_{i2}}{p_{i1}} = \frac{3}{2}$$

单调似然比条件: 例 2

$$p_k = (0.2, 0.4, 0.3) \quad p_i = (0.3, 0.3, 0.4)$$

这两个概率分布不满足单调似然比条件.

$$\frac{p_{k3}}{p_{k2}} = \frac{3}{4} < \frac{p_{i3}}{p_{i2}} = \frac{4}{3}$$

$$\frac{p_{k3}}{p_{k1}} = \frac{3}{2} > \frac{p_{i3}}{p_{i2}} = \frac{4}{3}$$

$$\frac{p_{k2}}{p_{k1}} = \frac{4}{2} > \frac{p_{i2}}{p_{i1}} = \frac{3}{3}$$

单调似然比 (MLR) 条件

- MLR 是否能保证最优工资随着 j 增加而增加?

$$\frac{1}{u'(w_j)} = \sum_{k \neq i} \lambda_k \left(1 - \frac{p_{kj}}{p_{ij}} \right) + \mu$$

单调似然比 (MLR) 条件

- MLR 是否能保证最优工资随着 j 增加而增加?

$$\frac{1}{u'(w_j)} = \sum_{k \neq i} \lambda_k \left(1 - \frac{p_{kj}}{p_{ij}} \right) + \mu$$

答: 不能.

- 如果 $k < i$, 则 $\left(1 - \frac{p_{kj}}{p_{ij}} \right)$ 随 j 增加而增加, 否则减少.

如果我们能确保只有较低努力水平的约束是紧的 (即 $\lambda_k = 0$ for all $k > i$), 才能确保工资 w_j 随产出增加而增加.

凸分布函数假设

记 P_j 是 p_j 的累积分布函数 (CDF). 称分布 p 是凸的, 如果对 $i < j < k$ 和 λ 满足

$$a_j = \lambda a_i + (1 - \lambda) a_k$$

总有下列式成立:

$$P_{jl} \leq \lambda P_{il} + (1 - \lambda) P_{kl}$$

定理: 若 p 满足单调似然比和凸性假设, 则行动 a_i 下公司的最优合同 w_j^* 是关于 x_j 递增的.