

卖家最优机制: 解释和例子

理解卖家最优直接机制

- 分配规则 $q^*(v)$ 相对简单:
 - 将物品分配给边际收入最高且为正的参与人.
 - 否则, 卖家保留商品.
- 支付规则 $p^*(v)$ 看起来很复杂:
 - 若参与人 i 未中标, $p_i^*(v) = 0$; 否则, $p_i^*(v) = v_i - \int_0^{v_i} q_i^*(x, v_{-i}) dx$.
 - 不要被上面这个积分式子吓到. 由于 $q_i^*(v_i, v_{-i})$ 关于 v_i 递增, 并且取值总是 0 或 1. 因此, 给定其它人的估值 v_{-i} , 一定存在某个临界值

$$r_i^*(v_{-i})$$

使得当 $v_i \geq r_i^*(v_{-i})$ 时, $q_i^*(v)$ 取值为 1, 否则 $q_i^*(v)$ 取值为零.

- 当参与人 i 支付为正时, 一定有 $v_i \geq r_i^*(v_{-i})$. 此时:

$$p_i^*(v) = v_i - \int_{r_i^*(v_{-i})}^{v_i} 1 \, dx = r_i^*(v_{-i})$$

- 当参与人 i 中标时, 他的支付恰好为 $r_i^*(v_{-i})$.
- 这个支付只取决于其他人的报价 v_{-i} , 独立于他自己报告的 v_i , 这一点很类似二价拍卖.

小结. 我们可以利用前面定义的 $r_i^*(v_{-i})$, 重新描述卖家最优支付规则:

- 当参与人 i 未中标时, 其支付为零.
- 当参与人 i 中标时, 我们首先计算临界值 $r_i^*(v_{-i})$: 参与人 i 在获得物品前提下能报出的最低估值.
 - $r_i^*(v_{-i})$ 的取值为使得以下式子成立的 r_i :

$$\varphi_i(r_i) \geq 0 \text{ 且 } \varphi_i(r_i) \geq \varphi_j(v_j), \forall j \neq i$$

- 参与人 i 的支付恰好为临界值 $r_i^*(v_{-i})$.

- Myerson (1981) 最早给出了卖家最优机制的刻画.
 - 这篇文章并没有发表在常见的经济学期刊上, 而是发在了运筹学期刊 MOR (Mathematics of Operations Research) 上.
 - 这是 MOR 的幸运: Myerson (1981) 是 MOR 至今为止引用最高的文章 (截止2025年4月), 并且引用量遥遥领先第二名的文章.
- 若干年后, Bulow 和 Roberts (1989) 为卖家最优机制提供了一个基于"价格理论"的解释.
- 我们接下来介绍这个价格理论解释, 其核心在于
 1. 注意到 Myerson 定义的**虚拟价值**其实是卖家的**边际收入**,
 2. 结合**三级价格歧视**来理解卖家最优机制.

最优分配规则的"价格理论"解释

- 回忆最开始 $n = 1$ 的例子:
 - 我们可以将 $\varphi_i(v_i) = v_i - (1 - F_i(v_i))/f_i(v_i)$ 理解为卖家在参与人 i 估值为 v_i 时, 增加物品分配概率所能获得的边际收益.
- 当 $\varphi_i(v_i) > \varphi_j(v_j)$ 时, 参与人 i 带来的边际收入大于参与人 j
- 卖家可通过将分配概率从 j 转向 i 来增加总收入.
- 因此, 最优策略就是将物品分配给具有最高正边际收益的参与人.
- 若所有边际收益均为负, 则卖家应保留物品.

卖家最优机制是缺乏效率的

卖家最优机制的低效性, 体现在两个方面:

1. 即使卖家自己对商品的估值为 0, 博弈结果中仍有正概率发生卖家继续持有商品的情形.
 - 这个情形和垄断卖家的低效性很类似.
2. 即使卖家最后把商品分配给了某个参与人 i , 这个参与人 i 也不一定是估值最高的, 我们只要求他的虚拟价值 (or, 边际收入) $\varphi_i(v_i)$ 最高且非负.
 - 这个情形似乎很诡异: 张三的估值比李四高, 但最后商品却分给了李四? 这显然对张三不公平.
 - 但再仔细想想, 这里的"不公平"其实很合理: 类比三级价格歧视, 卖家也会给"需求"更高的参与人设置更高的价格.

卖家最优机制: 例子

- 假设有两位参与人, 参与人 1 的估值服从 $[0, 10]$ 上均匀分布, 参与人 2 的估值服从 $[10, 30]$ 上的均匀分布.
- 在一价和二价拍卖规则下, 最后商品一定会分配给参与人 2. 并且参与人 2 的支付永远不会超过 10.
 - 卖家的期望收入为 5.
- 卖家在一价和二价拍卖下的期望收入太低了. 即使完全忽略参与人 1, 卖家定价 $P = 10$, 都可以确保10元的收入, 因为参与人 2 的估价总是高于10.
 - 卖家的最优价格为 $P = 15$, 这时期望收入为 $45/4 > 10$.
- 但是, 借助最优机制, 卖家的期望收入可以更高!

最优机制能带给卖家更高收益的直观解释:

- 一价拍卖, 二价拍卖, 和卖家直接定价这三种博弈规则, 都对参与人 2 太"友好"了: 参与人 1 的存在无法对参与人 2 构成威胁.
- 为了提高参与人 1 和参与人 2 的竞争, 卖家最优机制应该是"不公平"的: 机制必须偏向参与人 1, 这样才能让参与人 2 更积极地参与竞标.
 - Level up the playground.

我们可以用如下"包含最低出价的第二边际收入拍卖"来实现卖家最优机制:

1. 每个参与人报告自己的估值: v_1, v_2

2. 计算每个人的虚拟价值:

$$\varphi_1(v_1) = 2v_1 - 10, \quad \varphi_2(v_2) = 2v_2 - 30$$

- $\varphi_1(v_1) \geq 0 \iff v_1 \geq 5 \equiv r_1$, r_1 为参与人 1 的最低出价
- $\varphi_2(v_2) \geq 0 \iff v_2 \geq 15 \equiv r_2$, r_2 为参与人 2 的最低出价
- $\varphi_1(v_1) > \varphi_2(v_2) \iff v_1 > v_2 - 10$

3. 博弈结果如下:

- 若 $v_1 \geq r_1$ 且 $v_1 > v_2 - 10$, 参与人 1 获胜, 其支付为 $\max\{v_2 - 10, r_1\}$
- 若 $v_2 \geq r_2$ 且 $v_2 > v_1 + 10$, 参与人 2 获胜, 其支付为 $\max\{v_1 + 10, r_2\}$
- 否则, 无人获胜, 且参与人支付均为 0.

可以验证, 在上述"包含最低出价的第二边际收入拍卖"中, 如实报告 v_i 是参与人 i 的优势策略, $i \in \{1, 2\}$.

如果所有参与人的分布 F_i 均相同 (记此时的分布为 F), 称该情形是对称的.

此时, 上述"包含最低出价的第二边际收入拍卖"会退化为包含最低出价的第二拍卖. 我们将其表述为如下命题.

命题(对称情形下的最优拍卖机制). 若 N 个参与人的估值均来自相同的正则分布 $f(v)$, 卖家最优机制为设置保留价 (or, 最低出价) r^* 的第二价格拍卖, 其中保留价 r^* 满足:

$$r^* - \frac{1 - F(r^*)}{f(r^*)} = 0$$

对称情形下的最优拍卖机制: 例

假设有两位参与人, 每人的估值是独立的, 且服从 $[0, 1]$ 上的均匀分布.

1. 无保留价的二价拍卖下, 卖家期望收益为 $1/3$
2. 卖家最优保留价为 $1/2$, 此时期望收益为 $5/12 > 1/3$.

练习: 请计算并验证卖家的最优保留价为 $1/2$, 且此时卖家期望收益为 $5/12$.