直接披露机制与披露原理

单物品分配

- 参与人集合: $N = \{1, \ldots, n\}$
- 每个参与人 i 的估值 v_i, 代表其愿意为商品支付的最高价格.
- 记 $v_i \in [0, 1]$ 的概率密度函数为 f_i.
  - 假设 f_i 是连续的, 且其取值在 $[0, 1]$ 上恒为正.
  - 记 F_i 为 v_i 的累积分布函数
- 我们仍假设参与人的私人估值都是独立的, 但他们估值的分布 f_i 可以不同.
- 向量 $v = (v_1, \ldots, v_n)$ 表示所有参与人的估值

不完备信息

为了称呼方便, 我们仍沿用拍卖中的叫法, 称商品持有者为卖方.

- 每个参与人 i 私下看到自己的估值 v_i
- 卖家和其他参与人 $j \neq i$ 无法看到 v_i, 他们关于 v_i 的信念均为 $v_i \sim f_i$.
- 卖家自身对商品的估值为 $v_0 = 0$. 假设 v_0 为公开信息.

分配规则 $q(v)$

分配规则 $q(v)$ 由 n 个函数组成:

$$q(v) = (q_1(v), \ldots, q_n(v))$$

- 其中 $q_i(v)$ 表示估值向量为 $v = (v_1, \ldots, v_n)$ 时, 参与人 i 获得商品的概率

分配规则 $q(v)$ 必须满足:

- $q_i(v) \geq 0$ 且 $\sum_{j \in N} q_j(v) \leq 1.$

为什么不是 $\sum_{j \in N} q_j(v)$ 等于 1?

我们允许 $\sum_{j \in N} q_j(v) < 1$, 即卖家不一定总是将商品分配给某个买家.

- 当 $\sum_{j \in N} q_j(v) < 1$ 时, 卖家最后自己继续持有商品的概率为 $1 - \sum_{j \in N} q_j(v)$.
- 目前我们熟悉的拍卖例子中 (一价, 二价, 英式拍卖, 等等), 总是有 $\sum_{j \in N} q_j(v) = 1$:
  - 卖家以概率 1 将商品分配给报价最高的参与人; 即使存在多个最高报价时, 也满足 $\sum_{j \in N} q_j(v) = 1$.
- 但之后我们介绍最大化卖家收入的机制时, 会发生 $\sum_{j \in N} q_j(v) < 1$ 的情形.
  - 显然, 此时的分配规则不是社会最优的, 因为我们假设了卖家的估值为 0.

分配规则 $q(v)$ 的说明

- 如果我们把这个单物品分配设定拓展到 $M \geq 2$ 个(相同)物品分配的情形, 约束 $\sum_{j \in N} q_j(v) \leq 1$ 会变为 $\sum_{j \in N} q_j(v) \leq M$.
- 基于这个观察, 我们也可以把概率 $q(v)$ 解读为数量 (quantity):
  - 当参与人 i 有 1/2 概率获得商品时, 其收益为 $v_i/2$, 可以解读为我们分了"半个商品"给参与人 i.
  - 这种将概率解读为数量的做法依赖于参与人 i 效用函数的拟线性性.

我们使用字母 q, 而非更常见的字母 p 来表示概率, 不是因为上面这个"概率=数量"的解读, 而是因为 p 被另一个重要变量"支付" (payment) 占用了.

支付规则 $p(v)$

支付规则 $p(v)$ 也由 n 个函数组成:

$$p(v) = (p_1(v), \ldots, p_n(v))$$

- 其中 $p_i(v)$ 表示估值向量为 v 时, 参与人 i 的支付金额

注: $p_i(v)$ 取值可以为负

- 取值为负表示卖方会付钱给参与人 i
- 取值为正表示参与人 i 会付钱给卖方

可行的直接机制

称分配规则和支付规则的组合 $(q(v), p(v))$ 为直接机制.

- 即: 直接机制 = 分配规则 + 支付规则.

定义: 直接机制 $(q(v), p(v))$ 是可行的, 若 $(q(v), p(v))$ 可以被某个博弈规则下的纳什均衡所实施.

单物品分配问题有无穷多可能的博弈规则:

- 一价拍卖, 二价拍卖, 全支付拍卖, 竞赛, 等等...

例: 二价拍卖均衡对应的直接机制

二价拍卖中, 实话实说 ($b_i = v_i$) 构成纳什均衡. 因此, 二价拍卖均衡下的分配规则和支付规则如下 (忽略存在多个最高报价的情形):

- 分配规则:
  - $q_i(v) = 1$ 若 $v_i = \max\{v_1, \ldots, v_n\}$, 否则 $q_i(v) = 0$.
- 支付规则:
  - $p_i(v) = v_{(2)}$ 若 $v_i = \max\{v_1, \ldots, v_n\}$, 否则 $p_i(v) = 0$.
  - 其中 $v_{(2)}$ 表示集合 $\{v_1, \ldots, v_n\}$ 中第二大的值

根据可行直接机制的定义, 上述 $(q(v), p(v))$ 是可行的.

例: 一价拍卖均衡对应的直接机制

假设每个 v_i 服从 $[0, 1]$ 上的均匀分布. 一价拍卖均衡下的分配规则和支付规则:

- 分配规则:
  - $q_i(v) = 1$ 若 $v_i = \max\{v_1, \ldots, v_n\}$, 否则 $q_i(v) = 0$.
- 支付规则:
  - $p_i(v) = \frac{n-1}{n} v_i$ 若 $v_i = \max\{v_1, \ldots, v_n\}$, 否则 $p_i(v) = 0$.

上述 $(q(v), p(v))$ 是可行的.

例: 全支付拍卖均衡对应的直接机制

全支付拍卖的博弈规则: 价高者得; 无论是否获胜, 每个参与人都要支付报价 b_i.

- 假设每个 v_i 服从 $[0,1]$ 上的均匀分布:
- 纳什均衡: $b(v_i) = (n-1)v_i^n/n$
- 这个均衡是对称的, 每个参与人的策略均相同

全支付拍卖均衡中:

- 分配规则: $q_i(v) = 1$ 若 $v_i = \max\{v_1, \ldots, v_n\}$, 否则 $q_i(v) = 0$.
- 支付规则: $p_i(v) = \frac{n-1}{n} v_i^n$

上述 $(q(v), p(v))$ 是可行的.

例: 竞赛 (contest)

竞赛博弈规则:

- 无论是否获胜, 每个参与人都要支付报价 b_i.
- 参与人 i 获得标的的概率为 $b_i / \sum_{j \in N} b_j$

假设每个 v_i 服从 $[0, 1]$ 上的均匀分布:

- 纳什均衡: $b(v_i) = (n-1)v_i^2/n^2$. 这个均衡也是对称的

全支付拍卖均衡中:

- 分配规则: $q_i(v) = v_i^2 / \sum_{j \in N} v_j^2$. 这是目前为止唯一缺乏效率的分配规则.
- 支付规则: $p_i(v) = (n-1)v_i^2/n^2$

直接披露机制 (Direct revelation mechanism)

在直接披露机制中:

1. 卖家事先承诺会使用分配规则 $q(v)$ 和支付规则 $p(v)$
2. 每个参与人 i 同时向卖家披露其估值 v_i
   - 注: 参与人 i 不一定要说实话
3. 卖家根据所有参与人的披露向量 $v = (v_1, \ldots, v_n)$ 确定最后的分配 $q(v)$ 和支付 $p(v)$

激励相容的直接披露机制

直接披露机制是一种特殊的博弈规则, 它完全由参数 $q(v)$ 和 $p(v)$ 确定.

- 我们可以直接用 $(q(v), p(v))$ 来表示直接披露机制.

称直接披露机制 $(q(v), p(v))$ 是激励相容的, 若每个类型的参与人如实披露自己的估值 v_i 构成纳什均衡.

思考: 如何用不等式约束表示激励相容条件?

记 V 为所有参与人估值组合的集合:

$$V = [0,1] \times \cdots \times [0,1] = [0,1]^n$$

对任意参与人 i , V_{-i}表示除 i 外其他参与人可能的估值组合:

$$V_{-i} = [0,1]^{n-1}$$

估值向量 $v = (v_1, \ldots, v_n)$ 的联合密度函数为:

$$f(v) = \prod_{j \in N} f_j(v_j)$$

激励相容的直接披露机制

直接披露机制 (q,p) 下, 当参与人 i 真实估值为 v_i 时, 其实话实说的期望效用:

$$U_i(q,p,v_i) = \int_{V_{-i}} (q_i(v)v_i - p_i(v))f_{-i}(v_{-i})dv_{-i}$$

激励相容约束(说真话约束):

- 对任意 $i \in N$ 和所有 $v_i, s_i \in [a_i, b_i]$,

$$U_i(q,p,v_i) \geq \int_{V_{-i}} (v_i q_i(v_{-i}, s_i) - p_i(v_{-i}, s_i))f_{-i}(v_{-i})dv_{-i}$$

可行的直接披露机制

除了激励相容约束外, 另外两个自然的约束条件是:

- 概率约束:

$$\sum_{j\in N} q_j(v) \leq 1, \qquad q_i(v) \geq 0, \quad \forall i \in N, \forall v \in V$$

- 个体理性约束 (参与约束):

$$U_i(q,p,v_i) \geq 0, \quad \forall i \in N, \forall v_i \in [0,1]$$

称满足以上三个约束的直接披露机制 (q,p) 是可行的.

(Direct) Revelation Principle

- 直接披露机制只是一种机制 (or, 博弈规则). 实际中, 卖家可以自由选择其它更一般的机制; 在这些其它机制中, 参与人 i 的策略可以更复杂.

(直接)披露原理: (q, p) 是可行的, 若且惟若其在直接披露机制下是可行的.

- 这个定理被称为 Revelation Principle. 它最常见的中文翻译是"显示原理".
- 直接披露原理使得我们在分析卖家最优或社会最优的机制时, 不需要穷尽所有可能的机制, 只需要考虑可行的直接披露机制 (q, p) 即可.

Myerson (1981)

Myerson (1981): Optimal Auction Design, 教师修改了其中的几处表达, 使得它和我们使用的术语一致.

> Using the revelation principle, we may assume, without loss of generality, seller only considers mechanisms in the class of feasible direct mechanisms. That is, we may henceforth identify the set of feasible mechanisms with the set of all outcome functions which satisfy the three constraints.

披露原理: 证明

披露原理是一个数学定理, 但是它不需要证明:

- 如果你理解了这个定理陈述的内容, 那么它的成立是显然的.
- 如果你不觉得披露原理的成立是显然的, 这说明你还没有完全明白这个定理表达的意思...

为了帮助我们来理解这个定理的意思, 我们以熟悉的二价拍卖和一价拍卖为例, 看看这两个博弈规则的均衡结果会和哪个可行的直接披露机制等价.

例: 一价拍卖对应的直接披露机制

一价拍卖: 价高者得, 并且只有胜者需要支付自己的报价

考虑如下直接披露机制 (q, p):

- 分配规则: $q_i(v) = 1$ 若 $v_i = \max\{v_1, \ldots, v_n\}$, 否则 $q_i(v) = 0$.
- 支付规则: $p_i(v) = \frac{n-1}{n} v_i$ 若 $v_i = \max\{v_1, \ldots, v_n\}$, 否则 $p_i(v) = 0$.

例: 一价拍卖对应的直接披露机制

一价拍卖: 价高者得, 并且只有胜者需要支付自己的报价

考虑如下直接披露机制 (q,p):

- 分配规则: $q_i(v) = 1$ 若 $v_i = \max\{v_1,\ldots,v_n\}$, 否则 $q_i(v) = 0$.
- 支付规则: $p_i(v) = \frac{n-1}{n} v_i$ 若 $v_i = \max\{v_1,\ldots,v_n\}$, 否则 $p_i(v) = 0$.

由于这个 (q,p) 就是一价拍卖均衡中的分配规则和支付规则, 上述直接披露机制是可行的 (即满足激励相容, 个体理性和概率约束).

- 并且, 这两个机制 (一价拍卖和直接披露机制 (q,p)) 的均衡结果完全相同.

例: 二价拍卖对应的直接披露机制

考虑如下直接披露机制 (q, p):

- 分配规则: $q_i(v) = 1$ 若 $v_i = \max\{v_1, \ldots, v_n\}$, 否则 $q_i(v) = 0$.
- 支付规则: $p_i(v) = v_{(2)}$ 若 $v_i = \max\{v_1, \ldots, v_n\}$, 否则 $p_i(v) = 0$.

由于这个 (q, p) 就是二价拍卖均衡中的分配规则和支付规则, 上述直接披露机制是可行的.

- 并且, 这两个机制 (二价拍卖和直接披露机制 (q, p)) 的均衡结果完全相同.

"证明" 披露原理

对任意博弈规则, 记其中参与人 i 的策略集为 S_i.

- 记其纳什均衡为 $(s_1(v), \ldots, s_n(v))$, 其中 $s_i \in S_i$ 为参与人 i 的策略.
- 该纳什均衡对应的直接机制记为 $(q(v), p(v))$

假设参与人 i 临时有事, 不能参与博弈, 他将自己的策略 s_i 告诉了好友张三, 让张三代替自己参加博弈. 但是, 参与人 i 没有告诉张三自己的私人估值 v_i.

- 问: 当张三询问参与人 i 他的估值时, 参与人 i 会如实告知他的 v_i 吗?

答: 参与人 i 会如实告知.

- 因为, 如果参与人 i 本人参加博弈的话, 他的均衡行动是 $a_i = s_i(v_i)$. 当他如实告知张三自己的估值 v_i 时, 张三会根据事先知道的策略 s_i, 同样选择行动 a_i.
- 如果参与人 i 告知张三的估值 $v_i' \neq v_i$, 张三选择的行动 $a_i' = s_i(v_i')$ 可能会偏离均衡行动: $a_i' \neq a_i$.
- 在纳什均衡中, 参与人 i 没有单方面偏离均衡行动的动机. 因此, 参与人 i 会如实相告.

假设上面提到的张三变为卖家, 并且所有参与人都临时有事, 没有来参加博弈; 但所有参与人都提前告知了卖家各自的策略 $s_i, \forall i \in N$.

博弈开始后, 当卖家向每个参与人询问他的私人估值时, 每个参与人都会如实相告: 因为每个人都没有单方面偏离均衡的动机.

假设上面提到的张三变为卖家, 并且所有参与人都临时有事, 没有来参加博弈; 但所有参与人都提前告知了卖家各自的策略 $s_i, \forall i \in N$.

博弈开始后, 当卖家向每个参与人询问他的私人估值时, 每个参与人都会如实相告: 因为每个人都没有单方面偏离均衡的动机.

卖家一番思索后, 觉得与其使用现在这个复杂机制, 不如他直接宣布会按照这个机制下纳什均衡结果对应的直接机制 $(q(v), p(v))$ 来确定最后的分配结果和支付结果, 每个人只需要告诉他自己的估值 v_i 即可.

每个参与人 i 都会欣然接受卖家的安排, 并如实告知自己的估值 v_i.

披露原理: 小结

披露原理: 单物品分配问题中, 所有可能博弈规则所能导致的均衡结果, 都可以通过某个可行的直接披露机制来实现.

- 因此, 当我们想要求解卖家的最大均衡收入时, 直接考虑所有可行的直接披露机制就行.

目前我们的讨论局限于 (1) 单物品分配问题和 (2) (贝叶斯)纳什均衡.

- 披露原理可以适用于非常一般的贝叶斯集体决策问题, 均衡概念也可以换成优势策略均衡或事后纳什均衡, 并且其证明方式和我们前面的"寓言式证明"完全相同.