

激励相容直接机制

披露原理 (Revelation principle)

分配规则: $q(v) = (q_1(v), \dots, q_n(v))$

- $q_i(v)$ 表示参与人 i 获得商品的概率. 需满足 $\sum_i q_i(v) \leq 1$ 以及 $q_i(v) \geq 0$.

支付规则: $p(v) = (p_1(v), \dots, p_n(v))$

- $p_i(v)$ 表示参与人 i 的支付, 注意其取值可以为负.

披露原理: 所有可行的 (q, p) 都可以通过可行的**直接披露机制** (q, p) 来实现:

1. 所有参与人同时报告自己的私人估值: $v = (v_1, \dots, v_n)$
2. 博弈结束. 参与人 i 获得商品的概率为 $q_i(v)$, 支付为 $p_i(v)$.

从事后 (ex post) 到事中 (interim)

- 我们前面讨论的分配规则 (支付规则), 其输入包括所有私人估值
- 这个设定方便我们刻画博弈结果, 但不利于我们分析参与人 i 的行为 (以及相应的激励相容和个体理性约束).
- 在参与人 i 眼中, 其自身估值 v_i 为确定值, 其对其他参与人估值

$$v_{-i} = (v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n)$$

的信念可表述为如下联合密度函数:

$$f_{-i}(v_{-i}) = \prod_{j \neq i} f_j(v_j)$$

- 给定(事后)直接机制 (p, q) , 其对应的事中 (interim) 直接机制为:

$$\bar{q}_i(v_i) = \int_{v_{-i} \in V_{-i}} q_i(v_i, v_{-i}) f_{-i}(v_{-i}) dv_{-i}$$

$$\bar{p}_i(v_i) = \int_{v_{-i} \in V_{-i}} p_i(v_i, v_{-i}) f_{-i}(v_{-i}) dv_{-i}$$

- 用 $r_i \in [0, 1]$ 来表示参与人 i 报告的私人估值, 则
 - 参与人 i 获得商品的概率为 $\bar{q}_i(r_i)$, 期望支付为 $\bar{p}_i(r_i)$
- 参与人 i 报告自己估值为 r_i 的事中期望效用为:

$$U_i(r_i; v_i) = v_i \bar{q}_i(r_i) - \bar{p}_i(r_i)$$

事中分配规则是单调递增的

激励相容约束下:

$$U_i(r_i; v_i) \leq U_i(v_i; v_i) \implies v_i \bar{q}_i(r_i) - \bar{p}_i(r_i) \leq v_i \bar{q}_i(v_i) - \bar{p}_i(v_i)$$

$$U_i(v_i; r_i) \leq U_i(r_i; r_i) \implies r_i \bar{q}_i(v_i) - \bar{p}_i(v_i) \leq r_i \bar{q}_i(r_i) - \bar{p}_i(r_i)$$

$$\implies v_i \bar{q}_i(r_i) + r_i \bar{q}_i(v_i) \leq v_i \bar{q}_i(v_i) + r_i \bar{q}_i(r_i)$$

$$\implies 0 \leq (v_i - r_i)(\bar{q}_i(v_i) - \bar{q}_i(r_i))$$

- 即: $\bar{q}_i(\cdot)$ 是单调递增的.

刻画事中支付规则 $\bar{p}_i(v_i)$

- 激励相容约束下, $r_i = v_i$ 一定是如下最优化问题的解

$$\max_{r_i} v_i \bar{q}_i(r_i) - \bar{p}_i(r_i)$$

- 一阶条件:

$$v_i \bar{q}'_i(v_i) - \bar{p}'_i(v_i) = 0 \implies \bar{p}'_i(v_i) = v_i \bar{q}'_i(v_i)$$

- 事中支付规则 $\bar{p}_i$ (几乎完全)由事中分配规则 $\bar{q}_i$ 决定:

$$\begin{aligned} \bar{p}_i(v_i) &= \bar{p}_i(0) + \int_0^{v_i} \bar{p}'_i(x) dx = \bar{p}_i(0) + \int_0^{v_i} x \bar{q}'_i(x) dx \\ &= \cdots = \bar{p}_i(0) + \bar{q}_i(v_i)v_i - \int_0^{v_i} \bar{q}_i(x) dx \quad (\text{由分部积分可得}) \end{aligned}$$

刻画激励相容直接机制

命题: 直接机制 $(p(v), q(v))$ 是激励相容的, 若且唯若对任意 $i \in N$, 事中规则 $(\bar{p}_i(v_i), \bar{q}_i(v_i))$ 满足如下两个约束:

1. 单调性: 事中分配规则 $\bar{q}_i(v_i)$ 是递增的;
2. 事中支付规则 $\bar{p}_i(v_i)$ 由事中分配规则 $\bar{q}_i(v_i)$ 和 $\bar{p}_i(0)$ 决定:

$$\bar{p}_i(v_i) = \bar{p}_i(0) + \bar{q}_i(v_i)v_i - \int_0^{v_i} \bar{q}_i(x) dx$$

注: 这个命题有时也被称为 Myerson 引理, 最后通过 $\bar{q}_i(v_i)$ 来计算 $\bar{p}_i(v_i)$ 的公式则被称为 Myerson 支付规则.

Myerson 引理的补充说明

- 我们前面的计算已经(基本)证明了(1)单调性和(2)Myerson 支付规则这两个条件是必要的, Myerson 引理说明这两个条件也是充分的.
- 我们前面的计算假设了 $\bar{q}_i(v_i)$ 和 $\bar{p}_i(v_i)$ 都是 (几乎处处) 可微的, 这个性质也可以由激励相容保证.
 - 严格说明条件二(即 Myerson 支付规则)需要用到一些进阶微积分内容(主要是实分析和勒贝格-斯蒂尔吉斯积分), 本课程略过不谈.
- 条件二可以证明, 一价拍卖和二价拍卖中卖家的期望收入一定相同.
 - 这两个机制对应的事中分配规则完全相同, 并且都满足 $\bar{p}_i(0) = 0$.
 - 因此, 这两个机制对应的事中支付规则完全相同.
 - 因此, 均衡中卖家的事前 (ex ante) 期望收入 ($\sum_{i \in N} \mathbb{E}_{v_i \sim f_i} \bar{p}_i(v_i)$) 相同.

收益等价 (Revenue Equivalence) 定理

定理. 若两个激励相容的直接机制满足

1. 它们的事中分配规则相同;
2. 私人估值最低的参与人对这两个机制无差异;

那么这两个机制带给卖家的期望收入一定相同.

- 注: 收益等价定理是 Myerson 引理的直接推论.

- 收益等价定理说明, 卖家从 {一价拍卖, 二价拍卖, 1.5 价拍卖, ..., 全支付拍卖} 中获得的期望收入是一样的. 因为这些机制都满足:
 1. 商品会以概率 1 分配给私人估值最高的参与人
 2. 私人估值为 0 的参与人的期望支付为零 $\bar{p}_i(0) = 0$
- 目前我们介绍的机制类型中, 唯一的例外是竞赛, 因为竞赛博弈中私人估值最高的参与人不一定会获得商品.