期望效用: 货币偏好💰 和风险规避

授课教师: 雷浩然

湖南大学课程

货币偏好

前面的课程讨论了张三对于定义在确定性结果 X 上的彩票的偏好.

- 这里的集合 X 是一个很抽象的集合, 它可以包括任何形式的奖励和惩罚 (如一杯奶茶, 一个 iPhone, 一万人民币或“课程加分”).

本讲我们讨论非常具体的集合: $X = \mathbb{R}$

- X 中的元素为货币或财富.

我们仍然用小写字母 u 表示张三的 vNM 效用函数, 大写字母 U 表示他的期望效用.

单调性、风险与效用函数

已知 $X = \mathbb{R}$, 我们可以对 vNM 效用函数 $u(x)$ 施加更多（合理的）限制:

- $u(x)$ 是严格递增的:
  - 若 $x > y$, 则 $u(x) > u(y)$.
  - 单调性是很合理的假设, 张三希望钱越多越好.
- 由于我们讨论的是不确定性下的偏好, 张三对于风险的态度 (风险厌恶或风险喜爱) 也会对效用函数的形式施加进一步的限制

本讲的目的, 在于分析 vNM 效用函数如何反映张三的风险态度

风险规避 (Risk Aversion)

以下两张彩票, 你更喜欢哪个?

1. 50% 的可能赢 10 万, 50% 的可能一无所获
2. 一定赢 5 万

风险规避 (Risk Aversion)

以下两张彩票, 你更喜欢哪个?

1. 50% 的可能赢 10 万, 50% 的可能一无所获
2. 一定赢 5 万

尽管两张彩票的期望回报相同, 但多数人会选彩票 2, 因为它的“风险”更小.

以下两张彩票, 你更喜欢哪个?

1. 50% 的可能赢 10 万, 50% 的可能一无所获
2. 一定赢 5 万

尽管两张彩票的期望回报相同, 但多数人会选彩票 2, 因为它的“风险”更小.

问: 我们目前为止关于彩票偏好关系的假设 (vNM 三公理和严格单调假设), 可以推导出这种风险规避行为么?

风险规避 (Risk Aversion)

以下两张彩票, 你更喜欢哪个?

1. 50% 的可能赢 10 万, 50% 的可能一无所获
2. 一定赢 5 万

尽管两张彩票的期望回报相同, 但多数人会选彩票 2, 因为它的“风险”更小.

问: 我们目前为止关于彩票偏好关系的假设 (vNM 三公理和严格单调假设), 可以推导出这种风险规避行为么?

- 不能. 期望效用模型本身不蕴含“风险规避”的性质.

如果我们进一步假设张三的 vNM 效用函数是凹的 (concave), 张三的行为就满足风险规避.

风险和效用函数的凹凸性

例: $u(x)=\sqrt{x}$, 其中 x 为最终收入.

1. 彩票一: 50% 的可能赢 10 万, 50% 的可能一无所获
   期望效用 = $0.5\times\sqrt{10}+0.5\times 0=\sqrt{2.5}$.
2. 彩票二: 一定赢 5 万
   期望效用 = $\sqrt{5}>\sqrt{2.5}$.
   - 张三会选择彩票二 (一定获得 5 万).

例: $u(x) = \sqrt{x}$, 其中 x 为最终收入.

1. 彩票一: 50% 的可能赢 10 万, 50% 的可能一无所获
   期望效用 = $0.5 \times \sqrt{10} + 0.5 \times 0 = \sqrt{2.5}$.
2. 彩票二: 一定赢 5 万
   期望效用 = $\sqrt{5} > \sqrt{2.5}$.
   - 张三会选择彩票二 (一定获得 5 万).

- 给定 $u(x) = \sqrt{x}$, 张三对于彩票一和“一定获得 2.5 万” 是无差异的.
- 称 2.5 万是彩票一的**确定性等价**

Jensen 不等式 (也叫凹函数不等式):

- 若函数 $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是严格凹的, 则对任意 $x_1 \neq x_2$ 和实数 $\alpha \in (0, 1)$, 下列不等式成立:

$$u(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) > \alpha u(x_1) + (1 - \alpha)u(x_2).$$

请结合 $u(x) = \sqrt{x}$ 的函数图像, 画图理解该不等式.

Jensen 不等式

Jensen 不等式可以很自然地推广到任意序列 $\{x_i\}$ 和 正序列 $\{\alpha_i\}$ 的情形:

$$u\left(\sum_i \alpha_i x_i\right) > \sum_i \alpha_i u(x_i), \text{ 对任意 } \sum_i \alpha_i = 1$$

- 如果函数 u 是严格凸的, 则反方向的不等式成立 (凸函数不等式).
- 如果 u 是线性的, 则 $u\left(\sum_i \alpha_i x_i\right) = \sum_i \alpha_i u(x_i)$.

Jensen 不等式

Jensen 不等式可以很自然地推广到任意序列 $\{x_i\}$ 和 正序列 $\{\alpha_i\}$ 的情形:

$$u\left(\sum_i \alpha_i x_i\right) > \sum_i \alpha_i u(x_i), \text{ 对任意 } \sum_i \alpha_i = 1$$

- 如果函数 u 是严格凸的, 则反方向的不等式成立 (凸函数不等式).
- 如果 u 是线性的, 则 $u\left(\sum_i \alpha_i x_i\right) = \sum_i \alpha_i u(x_i)$.

u 是线性的 <=> 张三是**风险中性**的

定义. 彩票 p 的**确定性等价** (certainty equivalent) 为满足下列方程的实数 x_p:

$$u(x_p) = \Sigma_{x \in X} p(x) u(x)$$

- 张三对于彩票 p 和“一定获得 x_p 元”是无差异的: $p \sim (1 \circ x_p)$.

风险态度

定义. 彩票 p 的**确定性等价** (certainty equivalent) 为满足下列方程的实数 x_p:

$$u(x_p) = \Sigma_{x\in X} p(x)u(x)$$

- 张三对于彩票 p 和“一定获得 x_p 元”是无差异的: $p \sim (1 \circ x_p)$.

记 $E[p] = \sum_{x\in X} p(x)x$ 为彩票 p 的期望.

- 若 $x_p < E[p]$ 对于所有非退化彩票 p 成立, 则张三是风险厌恶的 (risk–averse)
- 若 $x_p = E[p]$ 对于所有非退化彩票 p 成立, 则张三是风险中性的 (risk–neutral)
- 若 $x_p > E[p]$ 对于所有非退化彩票 p 成立, 则张三是风险喜爱的 (rish–loving)

风险态度

由 Jensen 不等式可知:

- 风险规避 $\Leftrightarrow u(\cdot)$ 是严格凹的 $(u''(x) < 0)$.
- 风险中性 $\Leftrightarrow u(\cdot)$ 是线性的 $(u''(x) = 0)$.
- 喜爱风险 $\Leftrightarrow u(\cdot)$ 是严格凸的 $(u''(x) > 0)$.

衡量风险规避的程度

几乎所有经济学研究中, 都假设参与人是风险厌恶或风险中性的.

在保险经济学和金融学等领域, 一般假设参与人是风险厌恶的, 并且会用不同的方式来量化参与人风险厌恶的程度.

我们介绍两个衡量风险厌恶的指标:

- 绝对风险规避
- 相对风险规避

绝对风险规避

张三拥有财富 $w \in \mathbb{R}$, 他面临两个选择: “确定获得 z 元”或“彩票 p”.

- 在第一个选择下, 他的效用为: $u(w+z)$.
- 在第二个选择下, 他的(期望)效用为 $\Sigma_{x \in X} p(x) u(w+x)$.

问: 如果你是张三, 你的选择会如何取决于你的已有财富 w?

绝对风险规避

张三拥有财富 $w \in \mathbb{R}$, 他面临两个选择: “确定获得 z 元”或“彩票 p”.

- 在第一个选择下, 他的效用为: $u(w+z)$.
- 在第二个选择下, 他的(期望)效用为 $\Sigma_{x \in X} p(x) u(w+x)$.

问: 如果你是张三, 你的选择会如何取决于你的已有财富 w?

- 如果张三接受彩票 p 的意愿随着财富 w 的增加而增加, 我们称他的**绝对风险规避** (ARA, Absolute Risk Aversion) 程度是随财富递减的.
- 若张三具有递减的 ARA, 并且他愿意在财富为 w_1 时选择彩票 p 而不是确定性回报 z, 那么当他的财富为 $w_2 > w_1$ 时, 他也一定会选择彩票 p.

绝对风险规避系数的定义：

$$A_u(w) = -u''(w)/u'(w)$$

- 不引起混淆时，我们也可以省略下角标直接写成 $A(w)$.

如果 $A(w)$ 是递减的，则称张三具有递减的绝对风险规避系数.

- 类似可定义恒定的或递增的绝对风险规避

绝对风险规避系数: 例

- $u(x) = e^{-\alpha x} \Rightarrow A(x) = \alpha$ (恒定绝对风险规避, CARA).
- $u(x) = x^{0.5} \Rightarrow A(x) = 1/(2x)$ (递减绝对风险规避).

绝对风险规避系数: 例

- $u(x) = e^{-\alpha x} \Rightarrow A(x) = \alpha$ (恒定绝对风险规避, CARA).
- $u(x) = x^{0.5} \Rightarrow A(x) = 1/(2x)$ (递减绝对风险规避).

记张三和李四的 vNM 效用函数分别为 u 和 v. 若存在递增的严格凹函数 g 使得 $v(x) = g(u(x))$, 则称李四比张三**更厌恶风险**.

- **练习:** 请验证, 此时李四的绝对风险规避高于张三: $A_v(x) > A_u(x)$.

相对风险规避

如果张三是一个投资者, 前面的分析中, 我们分析的是张三投资时的绝对回报.

- 下面我们用**回报率**, 而非绝对回报, 来分析张三的决策.

相对风险规避

如果张三是一个投资者, 前面的分析中, 我们分析的是张三投资时的绝对回报.

- 下面我们用**回报率**, 而非绝对回报, 来分析张三的决策.

张三的财富为 w, 他面临两个选择:

- 投资国债: 确定回报率 $z > 0$
- 投资股票: 回报率 r 服从分布 p

张三考虑将财富投资于其中一种资产:

- 如果他将所有财富投资于安全资产(国债), 他的效用为

$$u(w(1+z))$$

- 如果他将所有财富投资于风险资产(股票), 他的期望效用为

$$\Sigma_r p(r) u(w(1+r))$$

相对风险规避

问: 张三的选择如何取决于他的财富 w?

- 如果张三投资于风险资产的意愿随着财富的增加而增加, 我们称他的行为满足**相对风险规避** (RRA, relative risk aversion) 递减.
- 如果张三具有递减的 RRA, 并且他在财富为 w_1 时选择投资风险资产, 那么当他的财富为 $w_2 > w_1$ 时, 他也愿意投资于风险资产.

类似地, 可以定义递增 RRA 和恒定 RRA.

相对风险规避系数: 定义和例子

相对风险规避系数

$$R_u(x) = -xu''(x)/u'(x)$$

- 如果 $R(x)$ 是递减的 (或恒定的, 或递增的), 则称张三具有递减的 (或恒定的, 或递增的) 相对风险规避系数.

例子:

- $u(x) = x^{1-\alpha} \Rightarrow R(x) = \alpha$ (恒定相对风险规避, CRRA).
- $u(x) = e^{-\alpha x} \Rightarrow R(x) = \alpha x$

END