

卖家最优机制: 虚拟价值

上一节讨论了 Myerson 引理, 其中最重要的结论是 Myerson 支付公式:

$$\bar{p}_i(v_i) = \bar{p}_i(0) + \bar{q}_i(v_i)v_i - \int_0^{v_i} \bar{q}_i(x) dx$$

- $\bar{q}_i(\cdot)$ 和 $\bar{p}_i(\cdot)$ 分别表示参与人 i 的事中分配规则和事中支付规则.

本节中, 我们将刻画卖家的最优可行直接机制:

- 即最大化卖家收入且同时满足 (1) 激励相容 (2) 个体理性和 (3) 概率约束的直接机制

只有一个参与人 (即 $n = 1$)

我们先考虑 $n = 1$ 的简单情形:

- 此时的最优非随机直接机制等价于垄断卖家的定价问题.

定义"需求曲线":

- 定价为 r 时, 市场"需求"为 $q(r) = \Pr[v > r] = 1 - F(r)$
- 需求曲线: $r(q) = F^{-1}(1 - q)$

卖家选择 "产量" q 来最大化其期望收入 (假设卖家自身估值为零)

$$qr(q) = qF^{-1}(1 - q)$$

卖家的边际收入:

$$\begin{aligned} & F^{-1}(1 - q) + q \frac{dF^{-1}(1 - q)}{dq} \\ &= F^{-1}(1 - q) - \frac{q}{f[F^{-1}(1 - q)]} \end{aligned}$$

将上式表示为 v 的函数:

$$MR(v) = v - \frac{1 - F(v)}{f(v)}$$

问: 你还记得上面这个方程吗? (Hint: 我们在二级价格歧视中见过它)

虚拟价值

我们此前称这个函数为 **虚拟价值 (virtual value)**, 并用符号 $\varphi(v)$ 表示它:

$$\varphi(v) = v - \frac{1 - F(v)}{f(v)}$$

- 注: 虽然虚拟价值的参数看起来只有 v , 但它的函数形式取决于 v 的分布 F .

虚拟价值这个名字是 Myerson (1981) 起的.

- 我们马上就会看到, 虚拟价值对于刻画卖家最优机制至关重要

卖家期望收入

卖家的期望收入为:

$$\sum_{i \in N} \mathbb{E}_{v_i} [\bar{p}_i(v_i)]$$

卖家期望收入

卖家的期望收入为:

$$\sum_{i \in N} \mathbb{E}_{v_i} [\bar{p}_i(v_i)]$$

代入 Myerson 支付规则, 化简后可得到简化后的期望收入为:

$$\sum_{i \in N} \mathbb{E}_{v_i} [\varphi_i(v_i) \bar{q}_i(v_i)] + \sum_{i \in N} \bar{p}_i(0)$$

- 其中 $\varphi_i(v_i) = v_i - \frac{1 - F_i(v_i)}{f_i(v_i)}$ 表示参与人 i 估值 v_i 时的虚拟价值

请验证这个简化后的卖家期望收入. 这里唯一用到的积分技巧是交换积分次序.

检查个体理性约束

参与人 i 估值为 $v_i = 0$ 时的个体理性约束:

$$\bar{U}_i(0) = \bar{q}_i(0) \times 0 - \bar{p}_i(0) = -\bar{p}_i(0) \geq 0$$

在激励相容约束下, 其它类型参与人的个体理性约束自动满足:

$$\bar{U}_i(v_i) = \bar{q}_i(v_i)v_i - \bar{p}_i(v_i) = \cdots = \bar{U}_i(0) + \int_0^{v_i} \bar{q}_i(x) dx \geq 0$$

- 代入 Myerson 支付规则可得到上面的式子

小结: 卖家设定 $\bar{p}_i(0) \leq 0$ 时, 所有参与人的个体理性约束自动满足.

最大化期望收入 $\iff$ 最大化期望虚拟价值

$$\mathbb{E}_v \left[\sum_{i \in N} \bar{p}_i(v_i) \right] = \mathbb{E}_v \left[\sum_{i \in N} \varphi_i(v_i) \bar{q}_i(v_i) \right] + \mathbb{E}_v \left[\sum_{i \in N} \bar{p}_i(0) \right]$$

- 卖家会设定 $\bar{p}_i(0) = 0, \forall i \in N$.
- 最大化期望收入等价于最大化期望虚拟价值 $\mathbb{E}_v \left[\sum_{i \in N} \varphi_i(v_i) \bar{q}_i(v_i) \right]$

如何最大化虚拟价值?

- 注意到, $\bar{q}_i(v_i)$ 为参与人 i 在估值 v_i 时获得商品的(条件)概率, 同时 $\mathbb{E}_{v_i}[\bar{q}_i(v_i)]$ 表示参与人 i 会获得商品的(无条件)概率. 因此,

$$\sum_{i \in N} \mathbb{E}_{v_i}[\bar{q}_i(v_i)] \leq 1$$

卖家最优分配规则

- $\sum_{i \in N} \mathbb{E}_{v_i} [\varphi_i(v_i) \bar{q}_i(v_i)]$ 可以看成 $\varphi_1(v_1), \dots, \varphi_n(v_n)$ 的加权和.
- 最大化期望虚拟价值被归结为一个很简单的"线性代数"问题. 最优方案如下:
 - 以概率 1 将商品分配给虚拟价值**最高且非负**的参与人
 - 如果所有人的虚拟价值均为负, 卖家继续持有商品

问: 这个**最大化虚拟价值期望的分配规则**, 总是可行的吗?

- 个体理性约束 (✓)
- 概率约束 (✓)
- 激励相容约束 (?)

- 概率约束总是满足的.
- 当激励相容约束满足且 $\bar{p}_i(0) = 0$ 时, 所有参与人的个体理性约束自动满足.
- 根据 Myerson 引理, 激励相容约束等价于 (1) 分配规则的单调性以及 (2) Myerson 支付方程.
- "将商品分配给虚拟价值最高且非负的参与人", 这个做法满足单调性吗?
 - 不一定, 除非虚拟价值 $\varphi_i(v_i)$ 是单调递增的.
 - 随着 v_i 上升, 如果"信息租"的部分 $\frac{1-F_i(v_i)}{f_i(v_i)}$ 上升比 v_i 快, 虚拟价值 $\varphi_i(v_i)$ 会变小.

刻画卖家最优分配规则

- 假设虚拟价值 $\varphi_i(v_i) = v_i - \frac{1-F_i(v_i)}{f_i(v_i)}$ 是单调递增的.
 - 这本质上是对分布函数 F_i 的假设, 称满足该假设的 F_i 是正则的.

命题. 如果所有 F_i 都是正则的, 则卖家最优机制中的分配规则如下:

$$q_i^*(v) = \begin{cases} 1 & \text{若 } \varphi_i(v_i) > 0 \text{ 且 } \varphi_i(v_i) > \varphi_j(v_j) \forall j \neq i \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

- **文字描述:** 卖家将商品分配给虚拟价值最高且为正的参与人; 若所有参与人虚拟价值均为负, 则卖家继续持有商品.

刻画卖家最优支付规则

- 确定了 $q_i^*(v)$, 卖家最优机制的分配规则由 Myerson 支付方程决定.
- 已知 $\bar{p}_i(0) = 0$, 且 $\bar{p}_i(v_i) = \bar{q}_i(v_i)v_i - \int_0^{v_i} \bar{q}_i(x) dx$

Myerson 支付公式描述的是事中支付规则 ($\bar{p}_i(v_i)$ 由事后规则加权平均后得到), 我们可以用如下方式构造满足 Myerson 支付方程的事后支付规则:

$$p_i^*(0, v_{-i}) = 0, \quad p_i^*(v_i, v_{-i}) = q_i^*(v_i, v_{-i})v_i - \int_0^{v_i} q_i^*(x, v_{-i}) dx$$

$$\implies p_i^*(v) = \begin{cases} v_i - \int_0^{v_i} q_i^*(x, v_{-i}) dx & \text{若 } q_i^*(v) = 1 \\ 0 & \text{若 } q_i^*(v) = 0 \end{cases}$$

小结: 卖家最优直接机制

分配规则 $q^*(v)$:

- 根据所有参与者报告的估值 $v_1, \dots, v_n$, 计算相应的虚拟价值 $\varphi_1(v_1), \dots, \varphi_n(v_n)$
- 商品将分配给虚拟价值最高且为正的参与者. 否则, 卖家保留商品.

支付规则 $p^*(v)$:

- 只有中标者需要支付, 支付金额为 $v_i - \int_0^{v_i} q_i^*(x, v_{-i}) dx$.

我们在下一节会从"价格理论"的视角出发, 并提供具体的例子, 来帮助你理解卖家最优机制.

补充: 非正则分布和熨平法

- 我们前面刻画的卖家最优机制, 其可行性依赖 F_i 的正则性假设.
 - 此时, 卖家最优分配机制 $\bar{q}_i^*(v_i)$ 一定是非随机的.
- 如果 F_i 不是正则的, 可以用熨平法 (ironing) 求解满足单调性限制的卖家最优分配机制 $\bar{q}_i^*(v_i)$.
 - 此时, $\bar{q}_i^*(v_i)$ 可能是随机的.
 - 我们之后会简单介绍熨平法, 并在只有 $n = 1$ 个参与人时提供一个随机最优分配机制的例子.

补充: 虚拟价值 v.s. 边际收入

我们在二级价格歧视中最早接触到虚拟价值 $\varphi_i(v_i) = v_i - \frac{1-F_i(v_i)}{f_i(v_i)}$ 这个概念时, 称 $\frac{1-F(v)}{f(v)}$ 是卖家支付的信息租.

- 这种解读方式非常"万能": 只要卖家 (or, 委托人) 没有榨干消费者 (or, 代理人) 的所有剩余, 残留的部分剩余都可以被称为信息租.

针对卖家最优机制设计问题, 将 $\varphi(v)$ 理解为边际收入更为贴切.

- 卖家最优分配机制: 将商品分配给边际收入最高且为正的参与人.